F R A K T A L E

I. część
Geometria fraktalna

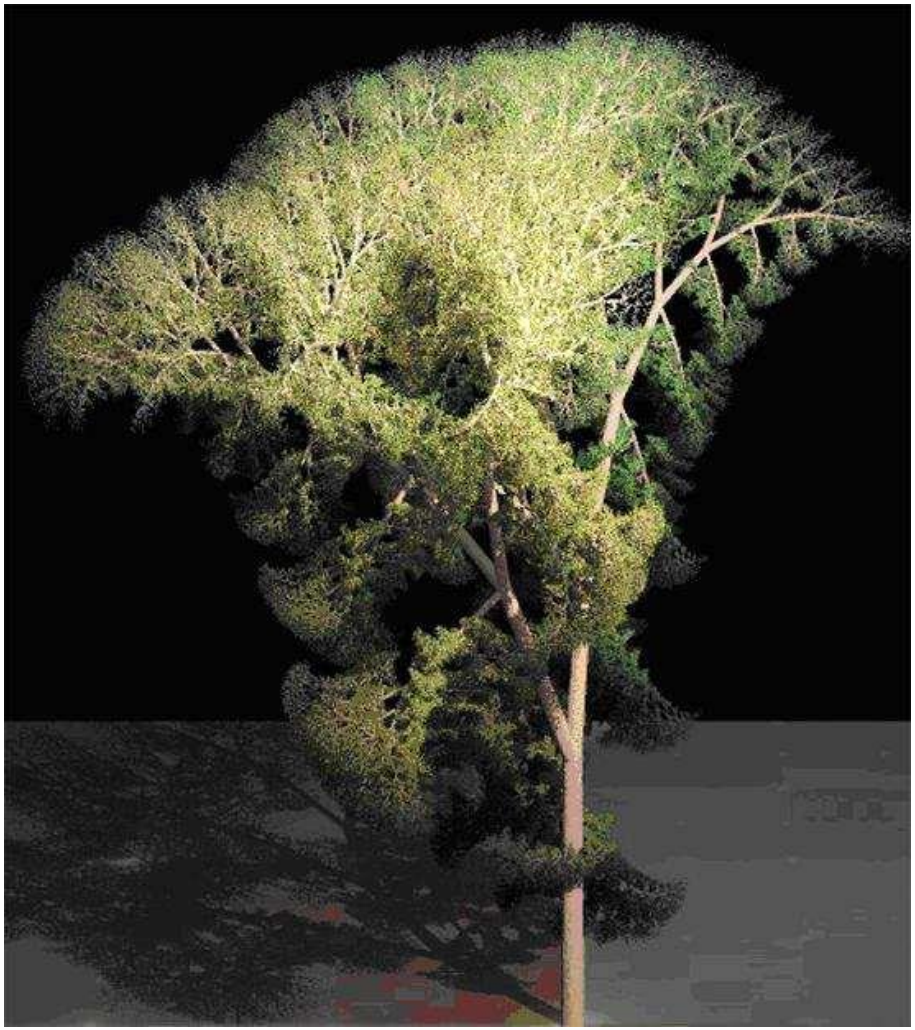
Nina Tomaszewska

XXVII LO im. T. Czackiego

Fraktale naturalne

http://www.youtube.com/watch?v=dZM45mfJQ40

Rycina 1: Dendrytyczne kryształy stilbenu (używanego w niektórych detergentach) w świetle spolaryzowanym (© Manfred Kage, Institut für wissenschaftliche Fotografie)



Fraktale matematyczne

- przykłady

- http://pl.wikipedia.org/wiki/Smok_Heighwaya
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%B3jk%C4%85t_Sierpi%C5%84skiego
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Piramida_Sierpi%C5%84skiego
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Papro%C4%87_Barnsleya
- http://cinderella.de/files/HTMLDemos/ - polecam „drzewko” i krzywą Kocha (brzeg śnieżynki)

Wymiar fraktalny

$$W_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest odcinkiem (kwadratem, sześcianem) miarowym
- $\boldsymbol{N(\varepsilon)}$ – liczba jednostkowych $\boldsymbol{\varepsilon}$ pokrywających obiekt geometryczny

Praktycznie:

W mianowniku (pod logarytmem) – ile razy zmniejszyliśmy miarkę, aby w następnym kroku móc zmierzyć obiekt

W liczniku (pod logarytmem) – ile zmniejszonych miarek pokrywa całkowicie obiekt

Tutaj można znaleźć bardzo ładną animację i sprytne wyjaśnienie obliczania wymiaru fraktalnego.

Obliczanie wymiaru zbioru Cantora

itd.

Jeśli w „zerowym” kroku weźmiemy $\varepsilon_0 = 1$ równy długości odcinka, to $N(\varepsilon_0) = 1$.

W następnym kroku weźmiemy $\varepsilon_1 = 1/3$, wtedy $N(\varepsilon_1) = 2$.

Zestawmy poniżej wyniki obserwacji.

$$\varepsilon_0 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N(\varepsilon_0) = 1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N(\varepsilon_1) = 2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N(\varepsilon_2) = 4$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{3^n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N(\varepsilon_n) = 2^n$$

Stąd:

$$W_F = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} \cong 0{,}63$$

Gdzie można w internecie odbyć wędrówkę po zbiorach Julii i Mandelbrota

https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk

https://www.youtube.com/watch?v=bo-MB1QPZ7E – tu bardziej kolorowo

http://www.matemaks.pl/fraktale.php

Polecam te stronę, jeśli chodzi o uczenie się matematyki np. do matury

Dla tych, którzy chcieliby popróbować samodzielnie…

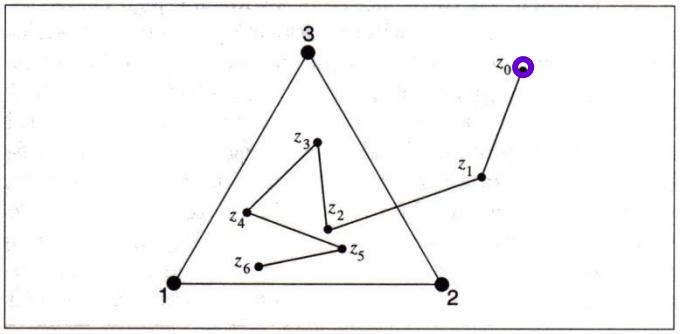
http://www.fractalforums.com/3d-fractal-generation/fractal-lab-webgl-fractal-renderer/

Jak tworzymy fraktale

- Niezbędny komputer - iteracja
- Przekształcenie afiniczne (powinowactwo) – zmniejszanie, powiększanie, obracanie
- Można narysować używając programu LOGO
- Można zagrać w grę w chaos

łatwo dostosować do naszych potrzeb — musimy po prostu utożsamić pary cyfr występujących na normalnej kostce, na przykład 6 z 1, 5 z 2, a 4 z 3. Taka kostka będzie naszym generatorem liczb losowych, przyjmującym jedynie wartości 1, 2 lub 3. Liczby losowe, które pojawią się w czasie trwania gry, na przykład 2, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1..., będą sterowały procesem. Proces, którym się zajmiemy, będzie opisany przez trzy proste reguły. Do opisu tych reguł musimy najpierw przygotować planszę do gry. Na rysunku 6.1 jest ona narysowana: trzy punkty bazowe oznaczone cyframi 1, 2 i 3 tworzą trójkąt.

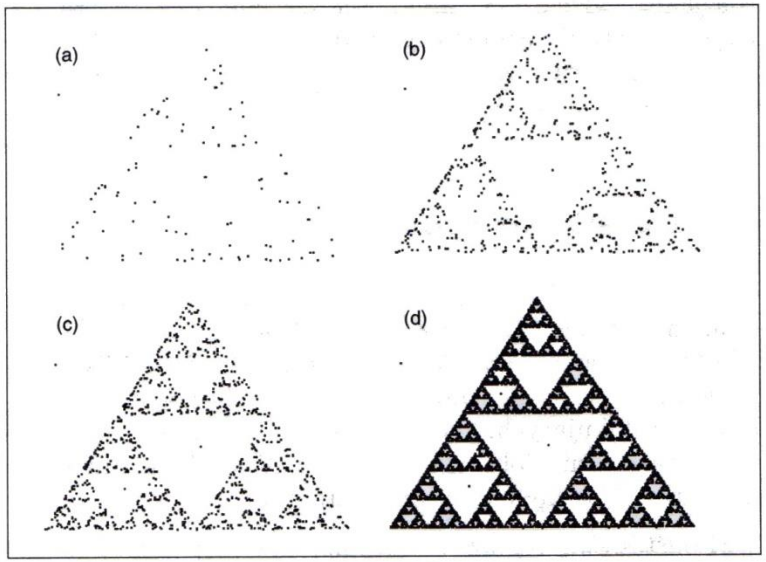
Pierwsze kroki...



Rysunek 6.2: Sześć pierwszych kroków naszej gry. Punkty wiodące są połączone odcinkami prostoliniowymi

Jesteśmy już gotowi do rozpoczęcia gry. Reguły wyjaśnimy w jej trakcie. Na początku wybieramy dowolny punkt na planszy i zaznaczamy go maleńką kropką. Jest to nasz bieżący punkt gry, *punkt wiodący*. Oznaczmy go przez z_0, by móc później się do niego odwoływać. Następnie rzucamy kostką. Przypuśćmy, że wypadło 2. Wyznaczamy następny punkt wiodący z_1, który będzie leżał dokładnie w połowie między punktem wiodącym z_0 a punktem bazowym oznaczonym cyfrą 2. Jest to pierwszy krok gry. Teraz łatwo jest odgadnąć, na czym polegają dwie pozostałe reguły naszej gry. Załóżmy, że graliśmy już k razy. Otrzymaliśmy zatem punkty $z_1, \ldots, z_k$. Rzućmy kostką. Jeśli otrzymaliśmy cyfrę n, to następny punkt wiodący, z_{k+1}, będzie leżał dokładnie w połowie pomiędzy punktem z_k a punktem bazowym oznaczonym cyfrą n. Na rysunku 6.2 przedstawiono kilka kroków takiej gry. Wyznaczenie kolejności punktów jest ułatwione dzięki połączeniu następujących po sobie punktów odcinkami. Powstaje kształt, który wydaje się tak samo nieciekawy i bezładny jak ten, który powstał w wyniku losowego błądzenia na płaszczyźnie. Taka obserwacja jest jednak bardzo daleka od prawdy. Na rysunku 6.3 pominęliśmy odcinki łączące punkty i zostawiliśmy jedynie punkty wiodące. Gra jest powtarzana (a) $k = 100$ razy, (b) $k = 500$ razy, (c) $k = 1000$ razy, (d) $k = 10\,000$ razy.

...i następ
punkty w



Rysunek 6.3: Gra w chaos po 100 krokach (a), 500 krokach (b), 1000 krokach (c) oraz 10 000 krokach (d). Zaznaczone są jedynie punkty wiodące, bez linii łączących. (Zauważmy, że pojawiło się kilka punktów, które w sposób oczywisty nie należą do trójkąta Sierpińskiego.)

http://www.wolframalpha.com/input/?i=chaos+game&lk=1&a=ClashPrefs_*MathWorld.ChaosGame-

II. część

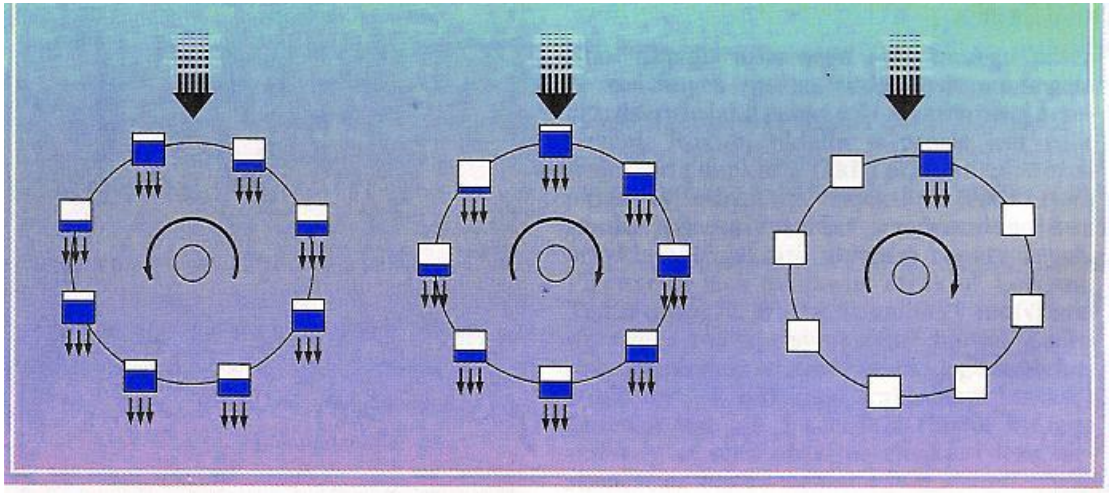
Związek fraktali z przyrodą

- Opis kształtów przyrody – wymiar fraktalny, jako narzędzie
- **Fraktal jako opis chaotycznego zachowania układu**

A co to jest chaos?

- **układ stochastyczny** (losowy): x_{n+1} nie zależy od x_n (fizyka statystyczna, fizyka kwantowa), ale opisany prawami dotyczącymi prawdopodobieństwa
- **chaos deterministyczny**: x_{n+1} zależy od x_n w ściśle określony prawem sposób
- **chaos „niczym nieopisany”**

Hydrauliczne koło Lorenza



Mimo pozornej prostoty, urządzenie może wykazywać bardzo skomplikowane chaotyczne zachowanie z powodu nieliniowych sprzężeń między jego parametrami: moment obrotowy i moment bezwładności są zmienne, a szybkość ich zmian zależy od prędkości kątowej koła.

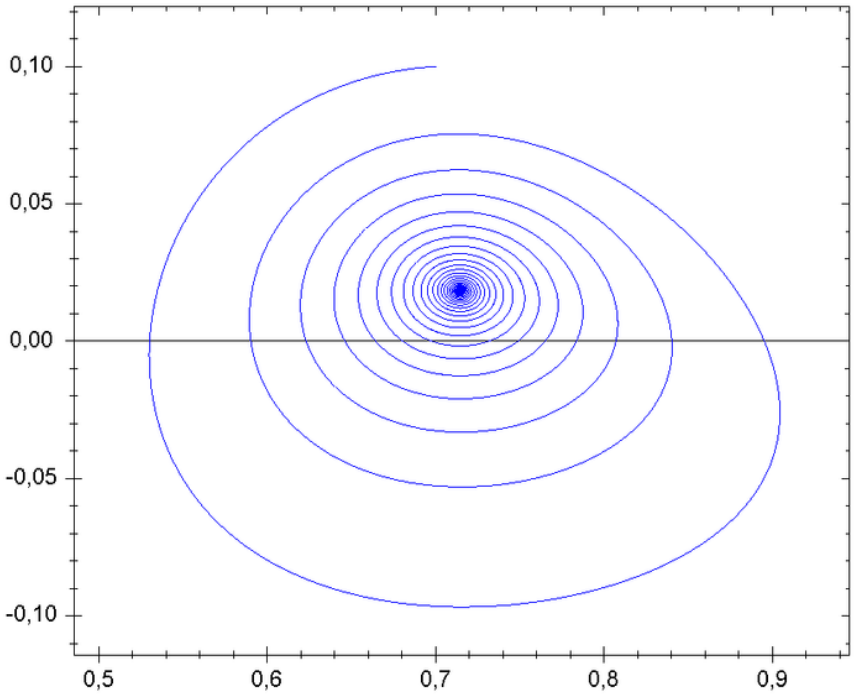
http://www.youtube.com/watch?v=7A_rl-DAmUE

https://www.youtube.com/watch?v=dhZxdV2naw8&feature=fvwrel#t=94.975059 – chaotyczny wiatraczek

Co to jest atraktor?

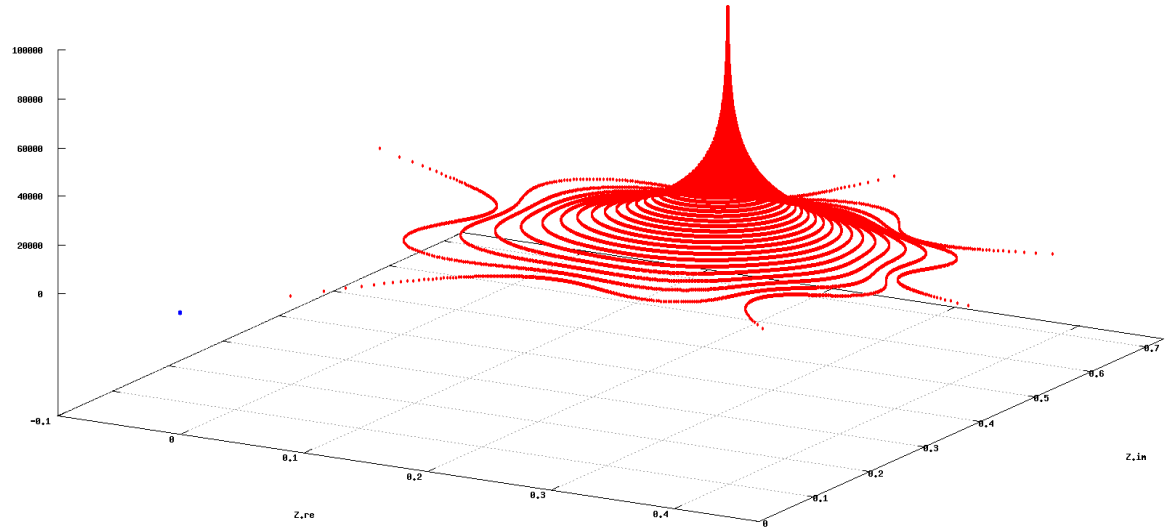
Przestrzeń fazowa – przestrzeń wszystkich możliwych stanów, w jakich może znajdować się badany układ. Każdy stan układu jest jednym punktem tej przestrzeni.

W mechanice klasycznej przestrzeń fazowa zwykle zawiera dopuszczalne wartości położenia i prędkości badanego obiektu. Wykres pokazujący zmiany tych wartości w czasie nazywany jest **wykresem fazowym**.



Atraktor – w analizie układów dynamicznych: zbiór w przestrzeni fazowej, do którego w miarę upływu czasu zmierzają trajektorie rozpoczynające się w różnych obszarach przestrzeni fazowej. Atraktorem może być punkt, zamknięta krzywa (cykl graniczny) lub **fraktal** (dziwny atraktor). Atraktor to jedno z podstawowych pojęć używanych w teorii chaosu.

Atraktor "przyciąga" znajdujące się blisko niego trajektorie. Każdy atraktor ma swój obszar przyciągania zwany basenem przyciągania (zbiór takich warunków początkowych, dla których trajektoria zmierza do atraktora). Najprostsze atraktory to punkty i cykle graniczne.



Słabo przyciągający punkt stały dla dyskretnego układu dynamicznego opartego na zespolonym dwumianie kwadratowym

Model Lorenza

– przedstawiony przez Edwarda Lorenza w 1963 układ trzech nieliniowych równań różniczkowych modelujący w możliwie najprostszy sposób zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

gdzie:

σ – liczba Prandtla - charakteryzująca lepkość ośrodka,

r – liczba Rayleigha - charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka,

b – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny

x – natężenie prądu konwekcyjnego

y – różnica temperatury między prądem wstępującym i zstępującym

z – odstępstwo od liniowości w pionowym rozkładzie temperatury

Jeszcze o modelu Lorenza

http://www.youtube.com/watch?v=DBteowmSN8g&feature=related - wersja elektroniczna !!!

http://www.youtube.com/watch?v=FYE4JKAXSfY&feature=related **- historia dla trzech bliskich warunków początkowych**

http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=iu4RdmBVdps&feature=endscreen – ładna (?) animacja atraktora Lorenza

Przekształcenie logistyczne

Rozwój populacji

– model „bez ograniczeń” (owady.xls)

– model „z ograniczeniem” (owady.xls)

– diagram Feigenbauma (chaos.xls)

- Logistic Equation
- folder FEIGEN

- Wahadło w polu trzech magnesów

Równanie:

$$\ddot{x} + R\dot{x} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - x}{\left(\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}\right)^3} + Cx = 0$$

+ analogiczne dla współrzędnej *y*

- Efekt motyla

1963 r. Edward Lorenz, model prognozy pogody opisany równaniami:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = Rx - y - xz$$

$$\dot{z} = -Bz + xy$$

- Rozwój populacji owadów w modelu Verhulsta

1844 r. i 1847 r. Równanie:

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$$

Cechy chaosu deterministycznego

- Układ jasno określony - opisany dość prostymi równaniami
- Ogromna wrażliwość na warunki początkowe
- Niemożność przewidzenia rozwiązania (rozwoju sytuacji)
- Geometrycznie problem opisany jest za pomocą atraktora, który jest fraktalem

Wszechobecność chaosu deterministycznego

...”chaos jest właściwie regułą w świecie, podczas gdy porządek (= przewidywalność) jest właściwie wyjątkiem”

H.-O. Peitgen

- Astronomia
  - ruch planet, satelitów, komet w Układzie Słonecznym (np. koziołkowanie Hyperiona – księżyca Saturna)
  - ruch gwiazd w galaktyce
  - pulsacje wczesnego Wszechświata
- Geofizyka
  - zachowanie cząstek promieniowania kosmicznego tworzących zorzę polarną w ziemskim polu magnetycznym
  - ruch atmosfery odpowiedzialny za „pogodę”
- Biologia
  - zmiany liczebności populacji np. szkodników
  - rozprzestrzenianie się epidemii
  - metabolizm w komórkach
  - propagacja impulsu wzdłuż nerwu
  - arytmia serca (migotanie przedsionków)

- Fizyka
  - ruch elektronów w atomie
  - ruch atomów w cząsteczce, w gazie
  - wypływ wody z kranu
  - utrata cząstek w akceleratorze
  - wywrotka statku na wzburzonym morzu
  - ruch hydraulicznego koła Lorenza
  - stany nieustalone prądów w obwodach elektrycznych
  - ...
- Inne
  - oscylacje reakcji chemicznych
  - giełda
  - ...

sprzężenie zwrotne

„Wystarczy, by oddziaływanie elementów układu miało charakter nieliniowy i by rozpraszał on energię”

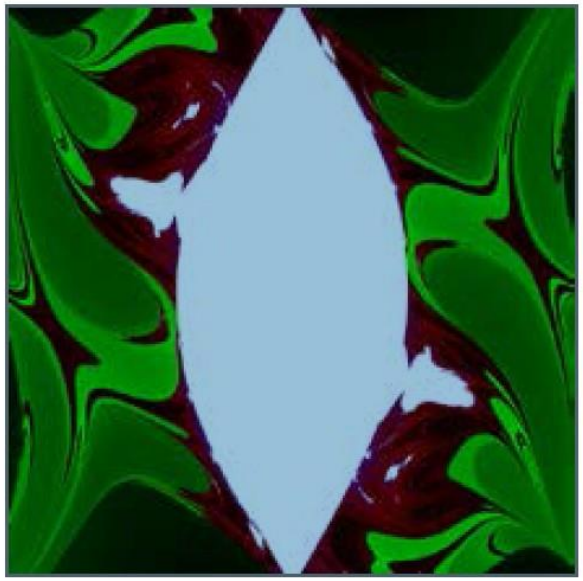
Jacek Turnau - „Chaos” W i Ż 2/92

Na zakończenie:

http://www.youtube.com/watch?v=QXf95_EKS6E&feature=fvwrel

Tutaj również ruch opisany jest przez fraktal widoczny po prawej (z artykułu Michała Ecksteina -„Co dwa wahadła, to nie jedno”).

A tutaj jeszcze wahadło, które można samemu sobie uruchomić.



STRUKTURA FRAKTALNA w ruchu podwójnego wahadła. Na osiach (lewej i dolnej krawędzi) odłożono wartości początkowe kątów wychylenia ramion θ_1 i θ_2. Kolory poszczególnych punktów odpowiadają czasowi, po jakim dolne wahadło po raz pierwszy obróci się o 180 stopni. Zasady kolorowania – opisane w tekście. Ilustracja ta pokazuje, że nawet najdrobniejsza różnica w początkowym ustawieniu wahadła może dramatycznie zmienić jego ruch.