Logarytmy

Definicja

Logarytmem
o podstawie ***a*** z liczby ***b*** nazywamy
taką liczbę ***c***, że

$$a^c = b$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

podstawa logarytmu

liczba logarytmowana

Pytanie:

Do jakiej potęgi trzeba podnieść podstawę logarytmu ***a***, aby otrzymać liczbę logarytmowaną ***b***?

Przykłady:

$$\log_2 8 = \mathbf{3} \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \mathbf{-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

Założenia:

- podstawa logarytmu ***a*** musi być liczbą dodatnią i nierówną 1;
- liczba logarytmowana ***b*** musi być liczba dodatnią;
- wynik logarytmowania ***c*** może być dowolny.

Założenia:

$$a > 0 \wedge a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$c \in R$$

Własności:

$$\log_a 1 = \mathbf{0}$$

$$\log_a a = \mathbf{1}$$

$$a^{\log_a b} = \boldsymbol{b}$$

Logarytm dziesiętny

to logarytm o podstawie 10.

$$\log b = c \Leftrightarrow 10^{c} = b$$

Przykłady:

$$\log 1 = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow 10^0 = 1$$

$$\log 0{,}1 = \mathbf{-1} \qquad \Leftrightarrow 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\log 100 = \mathbf{2} \qquad \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

$$\log \sqrt{10} = \mathbf{0{,}5} \qquad \Leftrightarrow 10^{0{,}5} = \sqrt{10}$$

Logarytm naturalny

to logarytm o podstawie *e*.

$$\ln b = c \Leftrightarrow e^c = b$$

Proste równania logarytmiczne

$$\log_x a = b$$

$$zał.: x \in R^+ \setminus \{1\}, a \in R^+,$$

$$b \in R \setminus \{0\}$$

$$x^b = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{b}} \leftarrow \text{odp.}$$

Przykład 1:

$$\log_x 25 = 2$$

$$zał.: x \in R^+ \setminus \{1\}$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 25^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{25}$$

$$x = 5 \leftarrow \text{odp.}$$

Przykład 2:

$$\log_x \frac{1}{8} = 3$$

$$zał.: x \in R^+ \setminus \{1\}$$

$$x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

odp.

Proste równania logarytmiczne

$$\log_a x = b$$

$$zał.: a \in R^+ \setminus \{1\},\ x \in R^+,$$

$$b \in R$$

$$x = a^b \leftarrow$$ odp.

Przykład 3:

$$\log_2 x = 4$$

$$zał.: x \in R^+$$

$$x = 2^4 \Rightarrow x = 16 \leftarrow \text{odp.}$$

Przykład 4:

$$\log_{\sqrt{3}} x = 2$$

$$zał.: x \in R^{+}$$

$$x = \sqrt{3}^{2} \Rightarrow x = 3 \leftarrow$$ odp.

Proste równania logarytmiczne

$$\log_a b = x \leftarrow \text{odp.}$$

$$zał.: a \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+,$$

$$x \in R$$

Przykład 5:

$$\log_2 2 = x$$

$$zał.: x \in R$$

$$x = 1 \leftarrow$$ odp.

Przykład 6:

$$\log_2 1 = x$$

$$zał.: x \in R$$

$$x = 0 \leftarrow$$ odp.

Przykład 7:

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = x$$

$$zał.: x \in R$$

$$\sqrt{2}^{x} = 4 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 4 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = 4 \quad \leftarrow \text{odp.}$$

Prawa działań na logarytmach

Logarytm iloczynu

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$zał.: a \in R^+ \setminus \{1\}, b_1, b_2 \in R^+,$$

Logarytm iloczynu – dowód:

$$Z: a \in R^+ \setminus \{1\}, b_1, b_2 \in R^+,$$

$$\log_a b_1 = c_1 \wedge \log_a b_2 = c_2$$

$$T: \log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$D: b_1 = a^{c_1} \wedge b_2 = a^{c_2}$$

$$L = \log_a (a^{c_1} \cdot a^{c_2}) = \log_a a^{c_1+c_2} =$$

$$= c_1 + c_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2 = P$$

Logarytm iloczynu - przykład

$$\log_3 6 = \log_3 2 + \log_3 3$$

$$= \log_3 2 + 1$$

Logarytm ilorazu

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$zał.: a \in R^+ \setminus \{1\}, b_1, b_2 \in R^+,$$

Logarytm ilorazu - przykład

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 1 - \log_2 2$$

$$= 0 - 1 = -1$$

Logarytm potęgi

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$zał.: a \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+,$$

$$m \in R$$

Logarytm potęgi - przykład

$$\log_3 144 = \log_3 12^2 = 2\log_3 12$$

$$= 2(\log_3 4 + \log_3 3)$$

$$= 2(\log_3 2^2 + 1)$$

$$= 2(2\log_3 2 + 1)$$

$$= 4\log_3 2 + 2$$

Zmiana podstawy logarytmu

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$zał.: a, c \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+$$

Zmiana podstawy logarytmu - przykład

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

Zmiana podstawy logarytmu

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{zał.}: a, b \in R^+ \setminus \{1\}$$

Zmiana podstawy logarytmu - przykład

$$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$


Savage Chickens
by Doug Savage
GET BACK TO WORK!
"BACK"? SO YOU THINK I WAS WORKING BEFORE?
©2007 BY DOUG SAVAGE
www.savagechickens.com