Wiadomości wstępne

TRÓJKĄTY

TRÓJKĄT - definicja

- **wielokąt o trzech bokach**.
- Trójkąt to najmniejsza (w sensie inkluzji) figura wypukła i domknięta, zawierająca pewne trzy ustalone i niewspółliniowe punkty płaszczyzny (otoczka wypukła wspomnianych trzech punktów).

Wikipedia

- Inkluzja w matematyce: relacja zawierania się zbiorów
- Otoczka wypukła
  podzbioru przestrzeni liniowej – najmniejszy zbiór wypukły zawierający ten podzbiór. Otoczkę wypukłą podzbioru ***A*** oznacza się zwykle jako ***conv A***, np. powłoką wypukłą zbioru wypukłego jest ten sam zbiór.

Powłoka (otoczka) wypukła

- Dla dowolnego skończonego zbioru punktów płaszczyzny $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, gdzie $n > 2$ powłoka wypukła tego zbioru jest **wielokątem wypukłym** (ewentualnie zdegenerowanym do odcinka) o wierzchołkach należących do zbioru .
  Analogicznie w przestrzeni 3-wymiarowej powłoka wypukła skończonego zbioru punktów jest **wielościanem wypukłym** (ewentualnie zdegenerowanym do wielokąta lub odcinka).

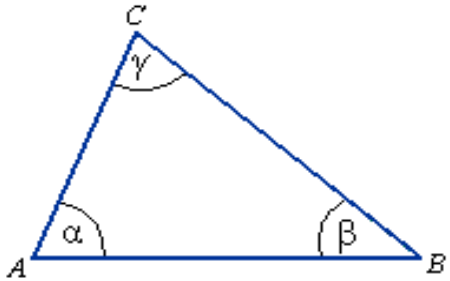
Powłoka (otoczka) wypukła

- Powłoką wypukłą zbioru trzech punktów niewspółliniowych (takich, które nie leżą na wspólnej prostej) jest…
  trójkąt o wierzchołkach w tych punktach.

- Otoczką wypukłą zbioru dwupunktowego {A, B} jest… odcinek AB.

TRÓJKĄT - definicja

- płaszczyzna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą złożoną z trzech odcinków.



. punkty *A*, *B*, *C* to wierzchołki trójkąta,
odcinki *AB*, *BC*, *CA* to boki trójkąta,
kąty α, β, γ to kąty wewnętrzne trójkąta.

TRÓJKĄT - definicje

- Trójkątem nazywamy część wspólną trzech półpłaszczyzn, których brzegi zawierają w sobie odpowiednie boki trójkąta gdzie wierzchołek nie należący do brzegu leży na półpłaszczyźnie.

- Trójkąt to część płaszczyzny ograniczona przez odcinki łączące trzy niewspółliniowe punkty.

- Trójkątem nazywamy figurę płaską będącą wielokątem o trzech bokach. Jeden z boków trójkąta jest nazywany podstawą.

Podział trójkątów

- ze względu na boki:

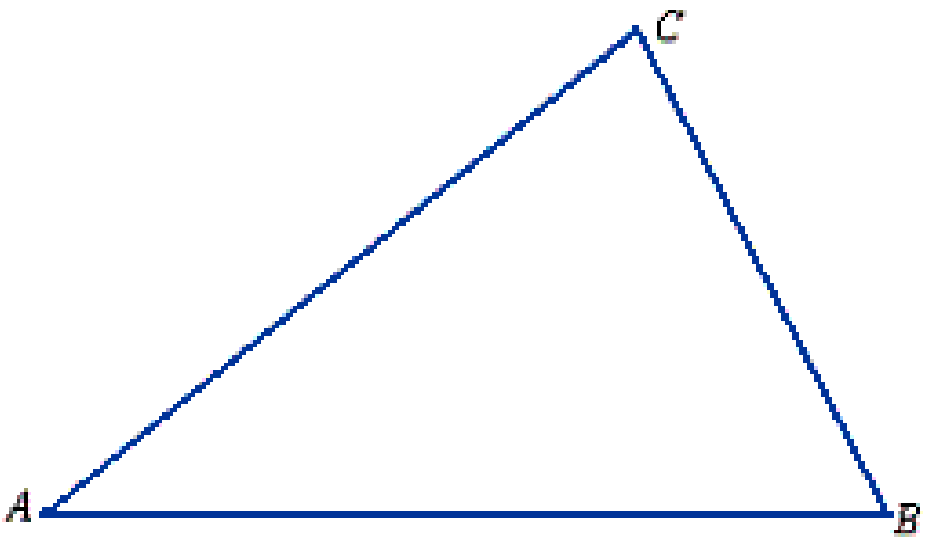
  trójkąt różnoboczny
  trójkąt równoramienny
  trójkąt równoboczny

- ze względu na kąty:

  trójkąt ostrokątny
  trójkąt prostokątny
  trójkąt rozwartokątny

Trójkąt różnoboczny

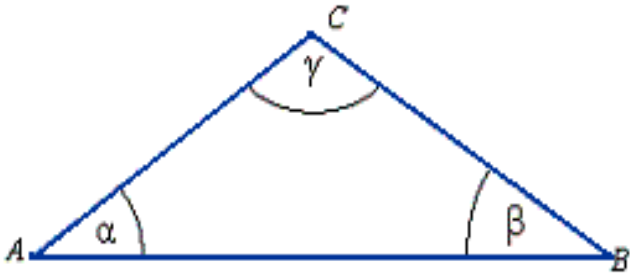
- każdy bok jest innej długości



- $$|AB| \neq |BC| \neq |AC| \wedge |AB| \neq |AC|$$

Trójkąt równoramienny

- dwa boki są równej długości



$$|AC| = |BC|$$

- Boki równe nazywamy ramionami, trzeci bok nazywamy podstawą. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają tę samą miarę $\alpha = \beta$.

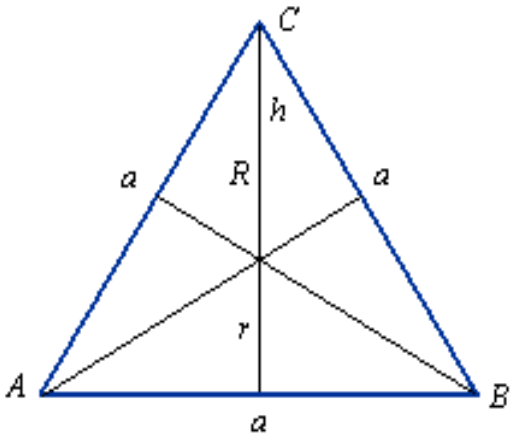
Trójkąt równoramienny

- Trójkąt równoramienny posiada **co najmniej jedną oś symetrii** przecinającą podstawę w połowie długości oraz przechodzącą przez wierzchołek kąta łączącego ramiona.

- W trójkącie równoramiennym dwie wysokości są równe. Trzecia wysokość opuszczona na podstawę dzieli ją na dwie równe części, a półprosta, w której leży ta wysokość, dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa kąty o równych miarach.

Trójkąt równoboczny

- wszystkie boki równej długości



$$|AB| = |BC| = |AC|$$

Trójkąt równoboczny - własności

- wszystkie kąty są równe i mają miarę 60°,
- wysokość trójkąta równobocznego dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne,
- wysokości trójkąta i dwusieczne jego kątów zawierają się w symetralnych boków tego trójkąta,
- wysokości trójkąta równobocznego dzielą się w stosunku 1:2,
- wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trójkąt równoboczny - własności

- punkt przecięcia wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w trójkąt

$$r = \frac{1}{3}h \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

- promień okręgu opisanego na trójkącie

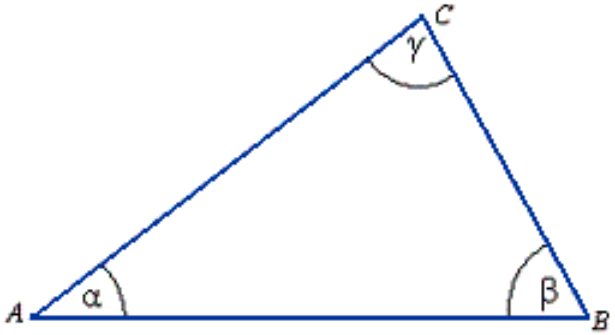
$$R = \frac{2}{3}h \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

- pole trójkąta $P = \frac{1}{2}a \cdot h \qquad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Trójkąt ostrokątny

- ma wszystkie kąty wewnętrzne ostre

$\alpha < 90°$
$\beta < 90°$
$\gamma < 90°$

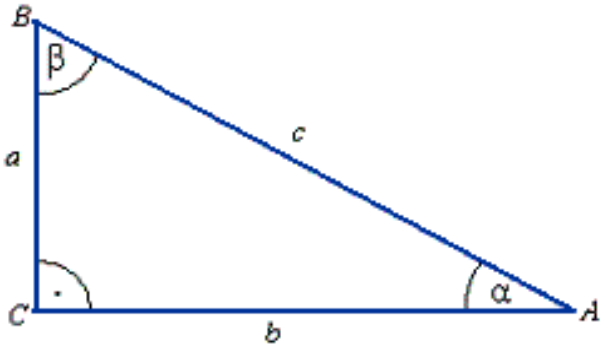


Wysokości w trójkącie ostrokątnym przecinają się w punkcie, który leży wewnątrz trójkąta.

Trójkąt prostokątny

- jeden z kątów wewnętrznych jest prosty

$\alpha + \beta = 90°$



- Dwa boki trójkąta leżące obok kąta prostego nazywamy **przyprostokątnymi**, a trzeci bok nazywamy **przeciwprostokątną**.

Trójkąt prostokątny

- Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są jego wysokościami.

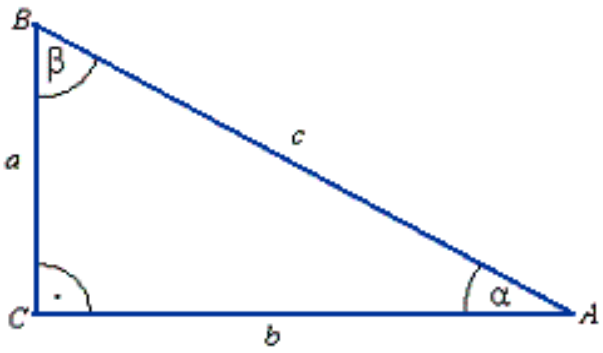
- Zależności w trójkącie prostokątnym:

  $a:c=\sin\alpha$,

  $b:c=\cos\alpha$,

  $a:b=\mathrm{tg}\,\alpha$,

  $b:a=\mathrm{ctg}\,\alpha$,



Trójkąt prostokątny

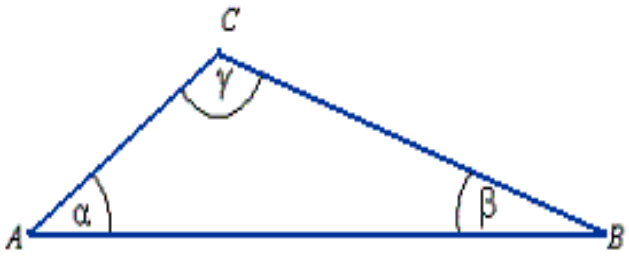
- Jeżeli kąty ostre trójkąta prostokątnego są równe 30° i 60°, to jego przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższa od przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 30°.

- Trójkąt prostokątny spełnia Twierdzenie Pitagorasa

Trójkąt rozwartokątny

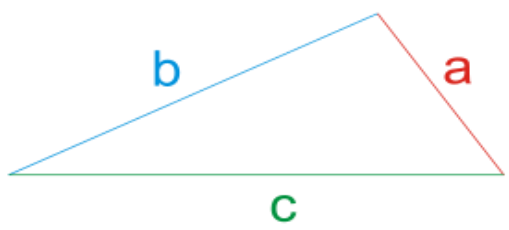
- jeden z kątów wewnętrznych jest rozwarty

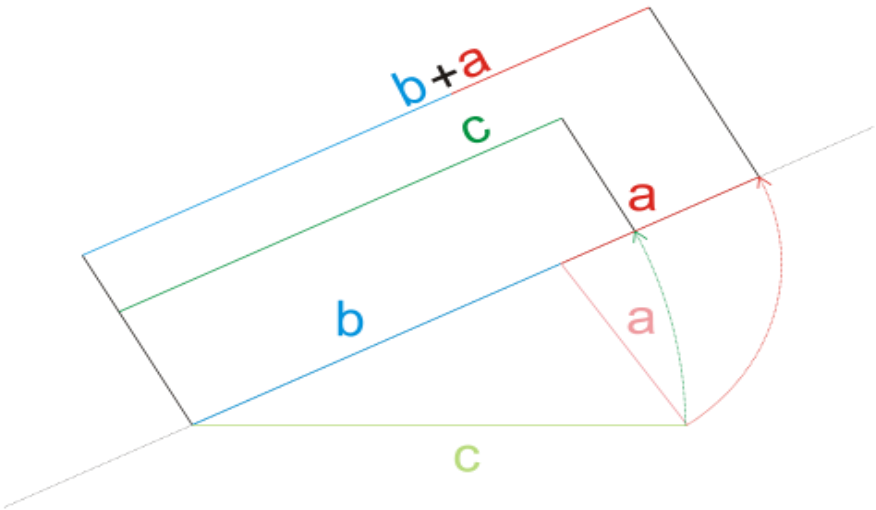
$\alpha + \beta < 90°$
$\gamma > 90°$



- Wysokości w trójkącie rozwartokątnym przecinają się w punkcie, który leży poza trójkątem.

Nierówność trójkąta





- W każdym trójkącie o bokach, których długości wynoszą *a*, *b* i *c* zachodzi następujące nierówności:

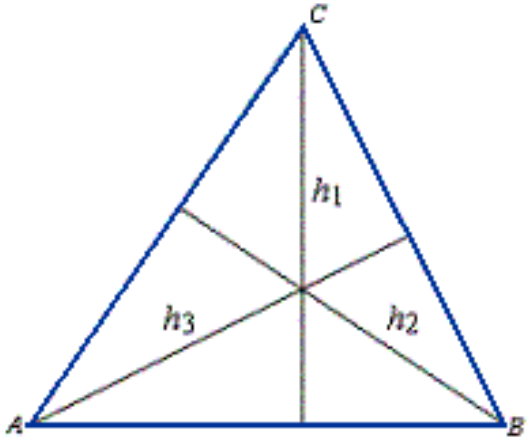
$$a < b + c,$$
$$b < c + a,$$
$$c < a + b.$$

- Trójkąt o bokach, których długości wynoszą *a*, *b* i *c* istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są te trzy nierówności.

- Nierówności te można zapisać łącznie: $|b - c| < a < b + c.$

Wysokość trójkąta

- najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem); jest on zawsze prostopadły do tego boku.



Wysokość trójkąta

- Punkt przecięcia wysokości z podstawą nazywa się **spodkiem** wysokości. Powstaje on w wyniku rzutu prostokątnego wierzchołka na podstawę.

- Każdy trójkąt ma trzy wysokości:

  - w trójkącie ostrokątnym wszystkie mają odcinek wspólny z wnętrzem trójkąta.
  - w trójkącie prostokątnym dwie z jego wysokości zawierają przyprostokątne.
  - w trójkącie rozwartokątnym wysokości poprowadzone z kątów ostrych przecinają go tylko w wierzchołku.

- W trójkącie równobocznym o boku a długości wszystkich wysokości są równej miary, która wynosi

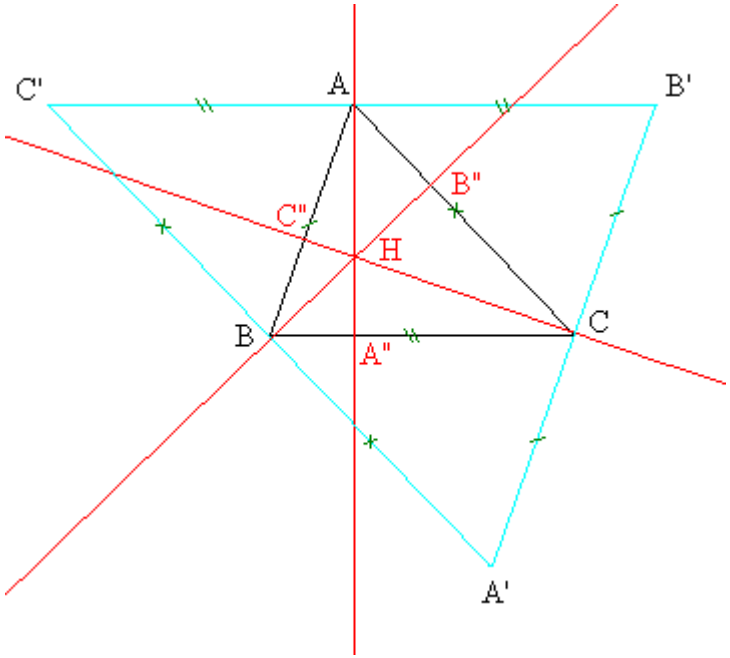
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tw. o wysokościach trójkąta

Proste zawierające wysokości dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód geometryczny

- Proste przechodzące przez punkty *A*, *B*, *C* równoległe odpowiednio do *BC*, *CA*, *AB* boków trójkąta *ABC* wyznaczają trójkąt A'B'C' .
- Ponieważ $AB' \parallel BC$ oraz $AB \parallel B'C$, to czworokąt *ABCB'* jest równoległobokiem, skąd wynika, że *BC* = *AB'* i podobnie *BC* = *AC'*.
- Zatem *A* jest środkiem boku *B'C'*. Analogicznie wykazuje się, że *B* jest środkiem *A'C'* , a *C* środkiem *A'B'* .
- Rozpatrywane wysokości trójkąta *ABC* są zarazem symetralnymi boków trójkąta *A'B'C'* , a więc przecinają się w jednym punkcie .

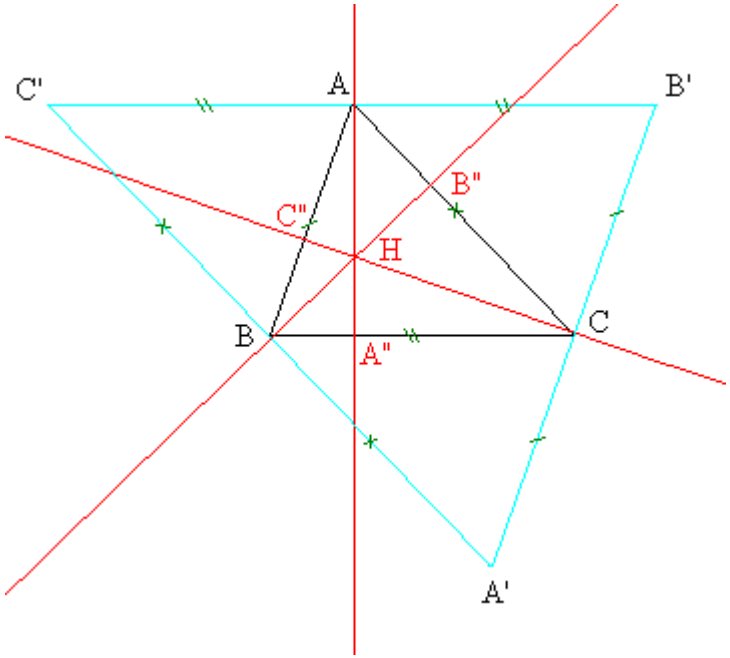


Tw. o wysokościach trójkąta

Proste zawierające wysokości dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

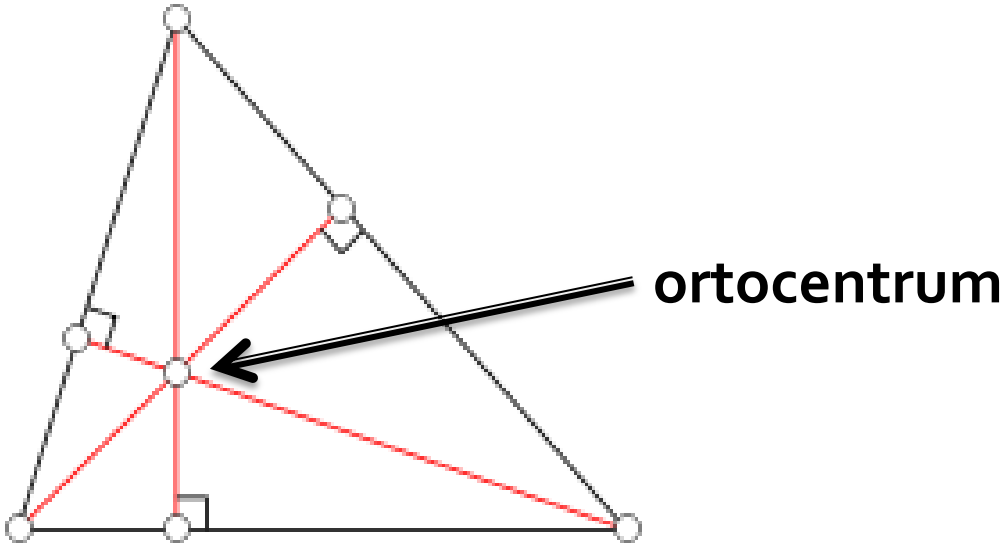
Drugi dowód geometryczny

- Niech *A″*, *B″* oznaczają spodki dwóch wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków *A* i *B* trójkąta *ABC*, a *H* – ich punkt przecięcia. Należy wykazać, że prosta *CH* przecinająca bok *AB* w punkcie *C″* jest do niego prostopadła.
- Na czworokącie *CA″HB″* można opisać okrąg, podobnie na czworokącie *A″BAB″*, stąd kąt *A″AB* jest równy kątowi *BB″A″* i równy kątowi *HCA″*.
- Ponieważ kąt *CHA″* jest równy kątowi *C″HA*, to miara kąta *HA″C* równa się mierze kąta *HC″A*, czyli kąt *HC″A* jest równy 90° .



Ortocentrum

- punkt przecięcia wysokości trójkąt

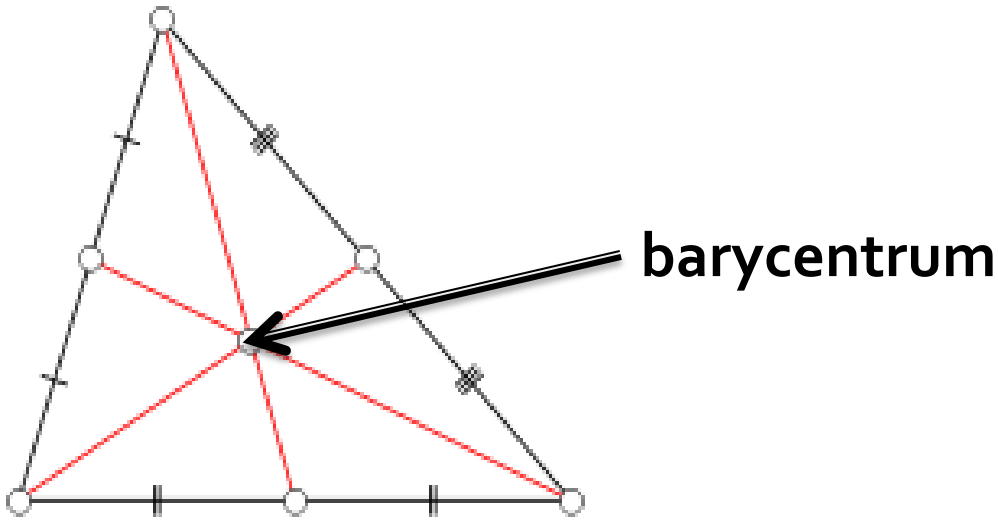


Środkowa trójkąta

- prosta zawierająca wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku.
- Każdy trójkąt ma trzy środkowe, które przecinają się w jednym punkcie, będącym środkiem geometrycznym (**barycentrum**, lub *środkiem ciężkości* lub, błędnie, *środkiem masy*) trójkąta.
- Punkt ten dzieli każdą ze środkowych na dwie części, przy czym odcinek łączący barycentrum z wierzchołkiem jest dwa razy dłuższy od odcinka łączącego barycentrum ze środkiem boku.
- **Uwaga**: Środkowej trójkąta nie należy mylić z linią środkową łączącą środki dwóch boków trójkąta.

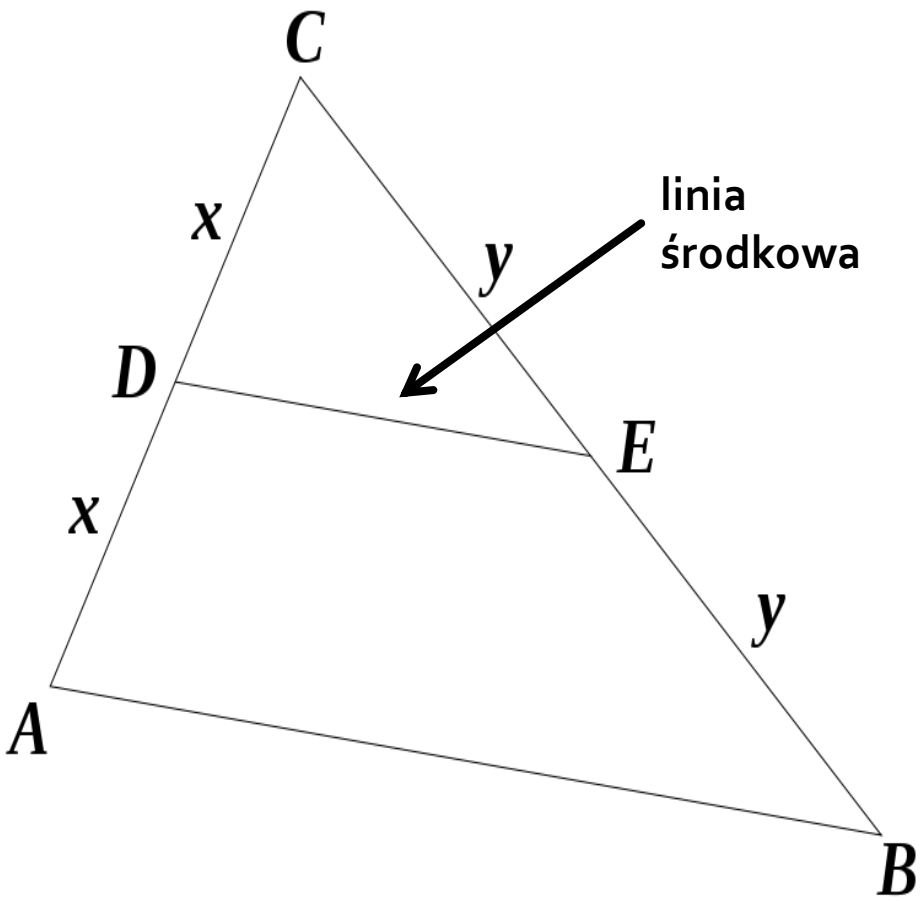
Barycentrum

- punkt przecięcia środkowych trójkąta



Linia środkowa

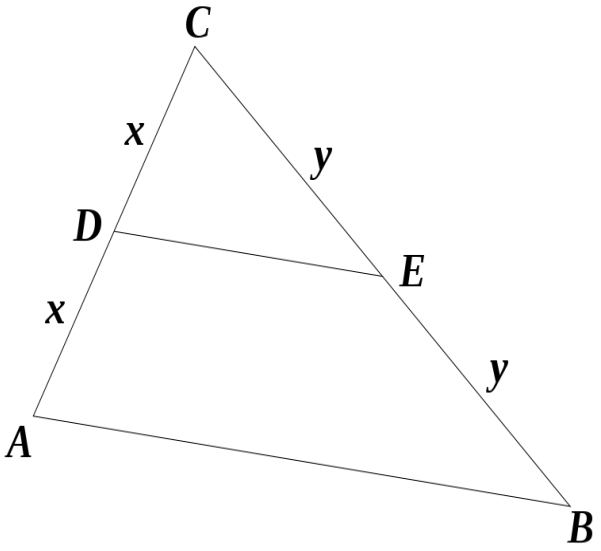
- odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta.
- W każdym trójkącie istnieją trzy różne linie środkowe, każdej z nich odpowiada jeden bok trójkąta - ten, z którym środkowa jest rozłączna.
- Linii środkowej nie należy mylić ze środkową trójkąta.
- **Twierdzenie:**
  Linia środkowa jest równoległa do odpowiadającego jej boku. Jej długość jest dwukrotnie mniejsza od długości tego boku.



Linia środkowa

Dowód (wektorowy)

- Zgodnie z oznaczeniami rysunku
  $\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}$
  co oznacza, że odcinek *DE* jest równoległy do odcinka *AB* i ma dwukrotnie mniejszą długość.



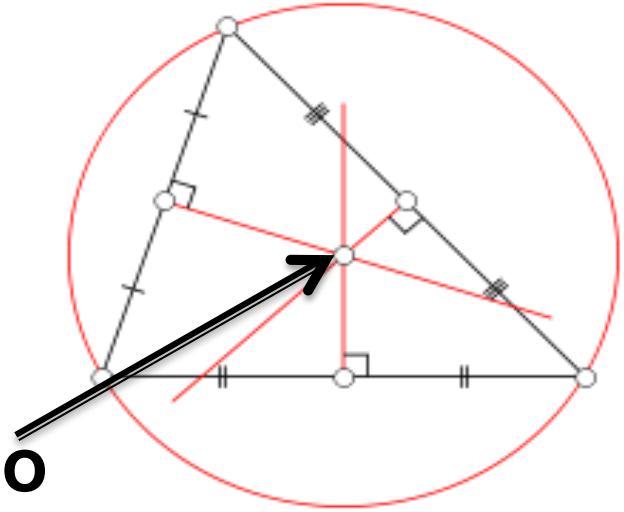
Dowód (geometryczny)

- Ponieważ $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$ więc spełnione są założenia odwrotnego twierdzenia Talesa.
  Stąd $AB \parallel DE$
  Oznacza to, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEC$ $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC$
- Wystarczy teraz skorzystać z podobieństwa trójkątów ABC i BEC

Symetralna boku trójkąta

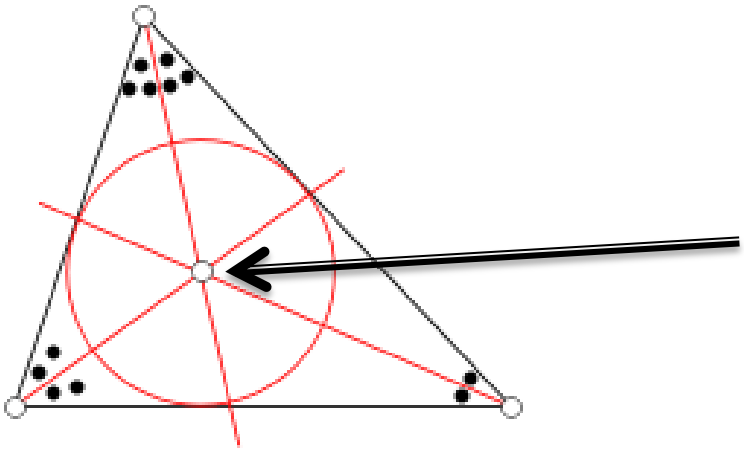
- prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek.

- Każdy trójkąt ma trzy symetralne boków, przecinające się w punkcie będącym **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.



Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta

- przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



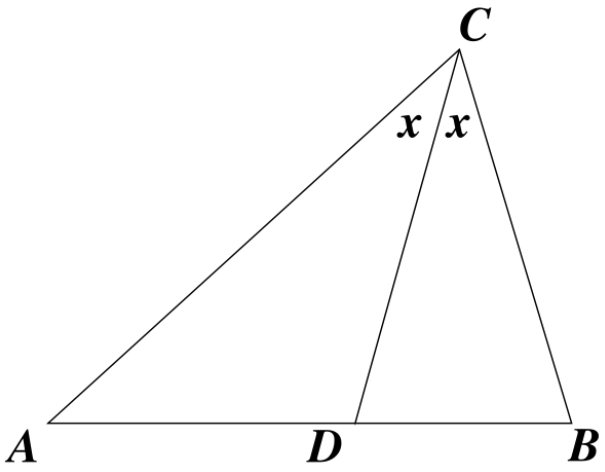
środek okręgu wpisanego w trójkąt

Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

- Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

- W oznaczeniach przyjętych na rysunku treść twierdzenia wyraża proporcja:

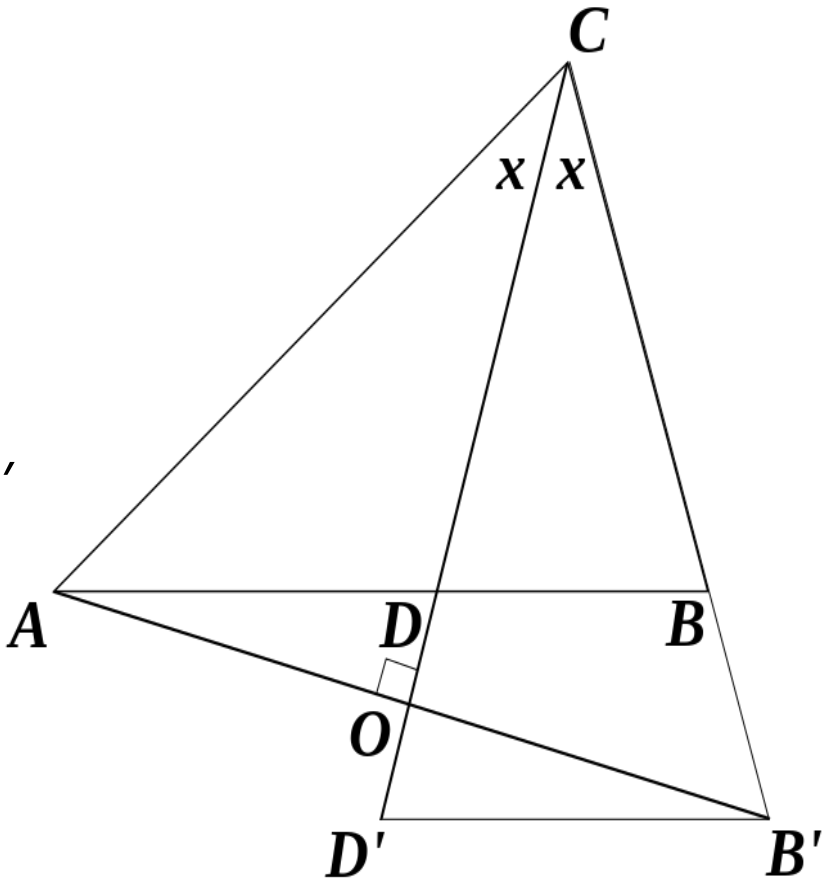
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$



Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

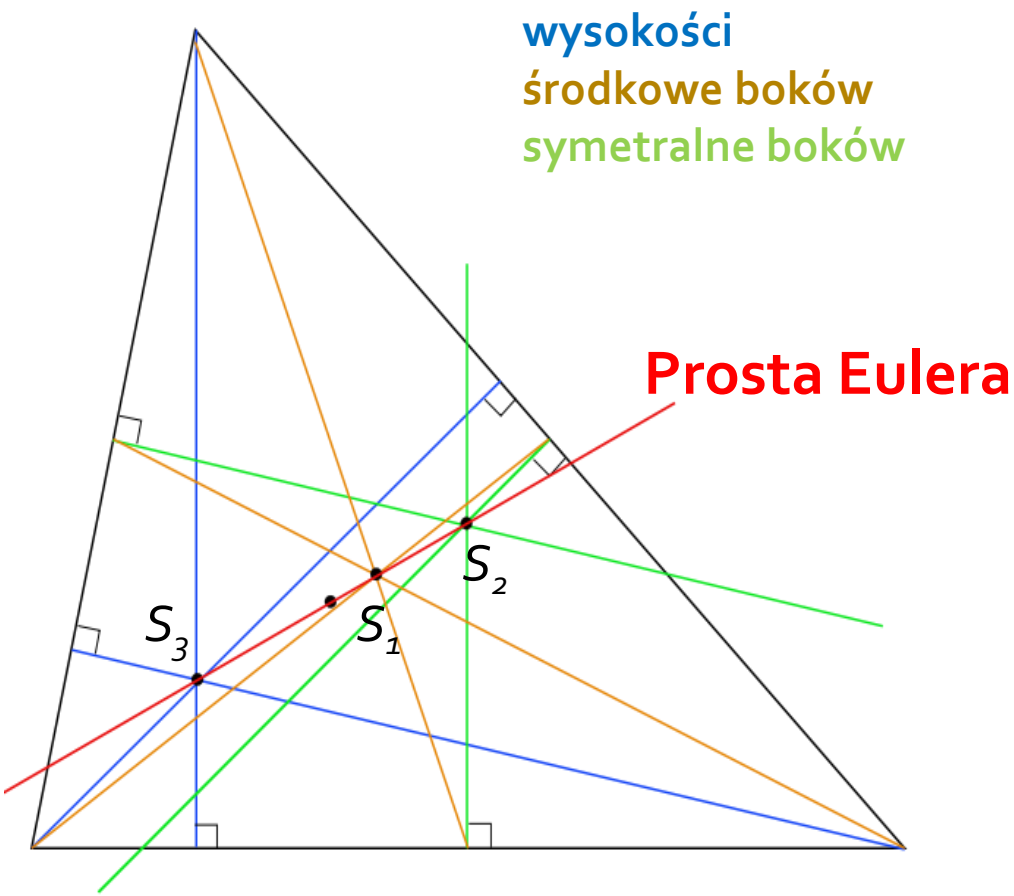
Dowód:

- Prowadzimy z punktu *A* półprostą *AO* prostopadłą do dwusiecznej *CD* w punkcie *O.* Przecina ona również przedłużenie boku *BC* w pewnym punkcie *B'* . Zauważyć trzeba, że $|AO| = |OB'|$ i $|AC| = |B'C|$.
- Następnie należy poprowadzić przez *B'* prostą równoległą do boku *AB* – przecina ona prostą *CD* w pewnym punkcie *D'* . Trójkąty ΔADO i $\Delta B'D'O$ są przystające, a więc $|D'B'| = |AD|$.
- Z podobieństwa trójkątów ΔDBC i $\Delta D'B'C$ wynika, że: $\frac{|D'B'|}{|DB|} = \frac{|B'C|}{|BC|}$ czyli $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$

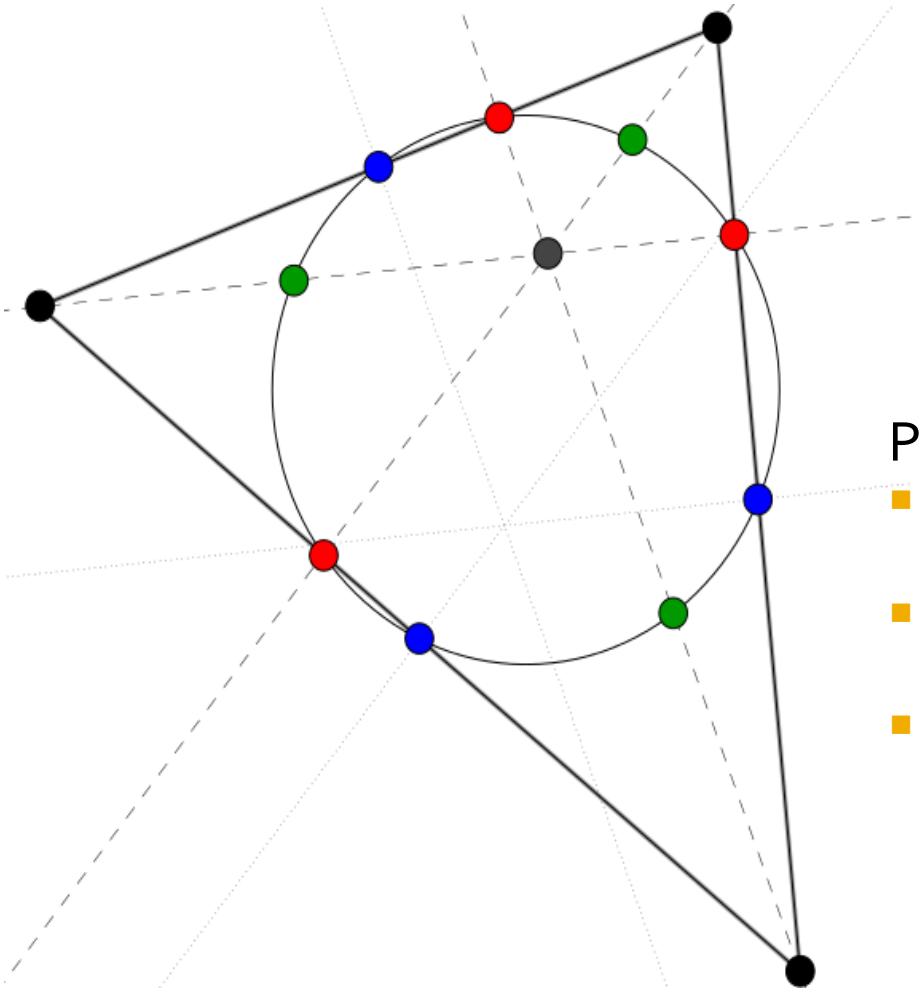


Prosta Eulera

W każdym trójkącie punkty przecięcia: środkowych boków S_1, symetralnych boków S_2, wysokości S_3 (odpowiednio: barycentrum, środek okręgu opisanego, ortocentrum) leżą na jednej prostej, zwanej prostą Eulera. Ponadto, $|S_1S_3| = 2|S_1S_2|$



Okrąg dziewięciu punktów



znany jest także jako **okrąg Feuerbacha** lub **okrąg Eulera** jest to okrąg, który przechodzi przez dziewięć charakterystycznych punktów dowolnego trójkąta.

Punktami tymi są:

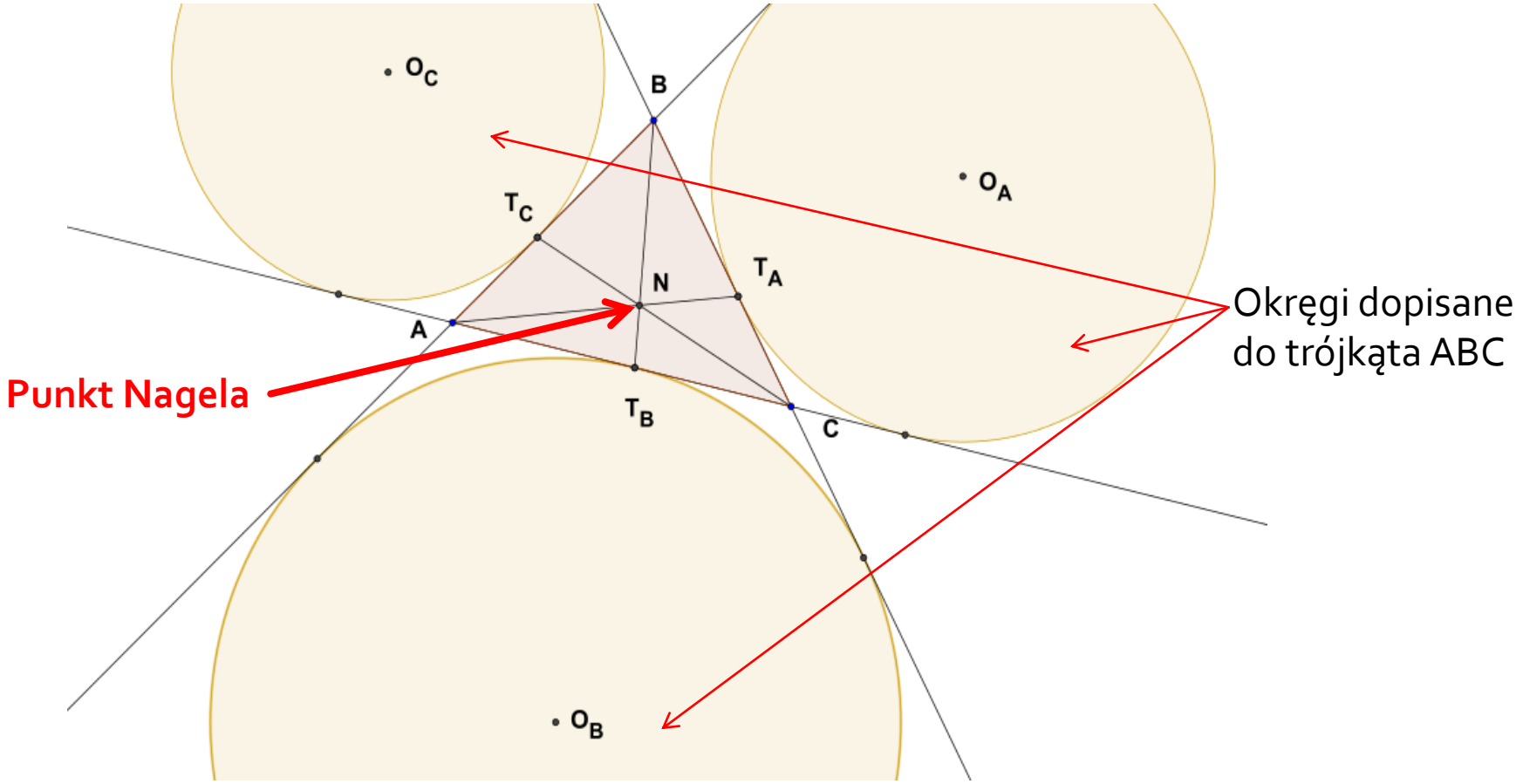
- środki boków (na rysunku **niebieskie**),
- spodki trzech wysokości (**czerwone**) oraz
- punkty dzielące na połowy trzy odcinki, które łączą wierzchołki tego trójkąta z jego ortocentrum (**zielone**) .

Punkt Nagela

- punkt w trójkącie związany z okręgami dopisanymi, nazwany od nazwiska Christiana von Nagela, niemieckiego matematyka, który opisał go w 1836 roku,

- punkt w którym przecinają się proste łączące wierzchołki z punktami styczności przeciwległych boków z odpowiednimi okręgami dopisanymi.

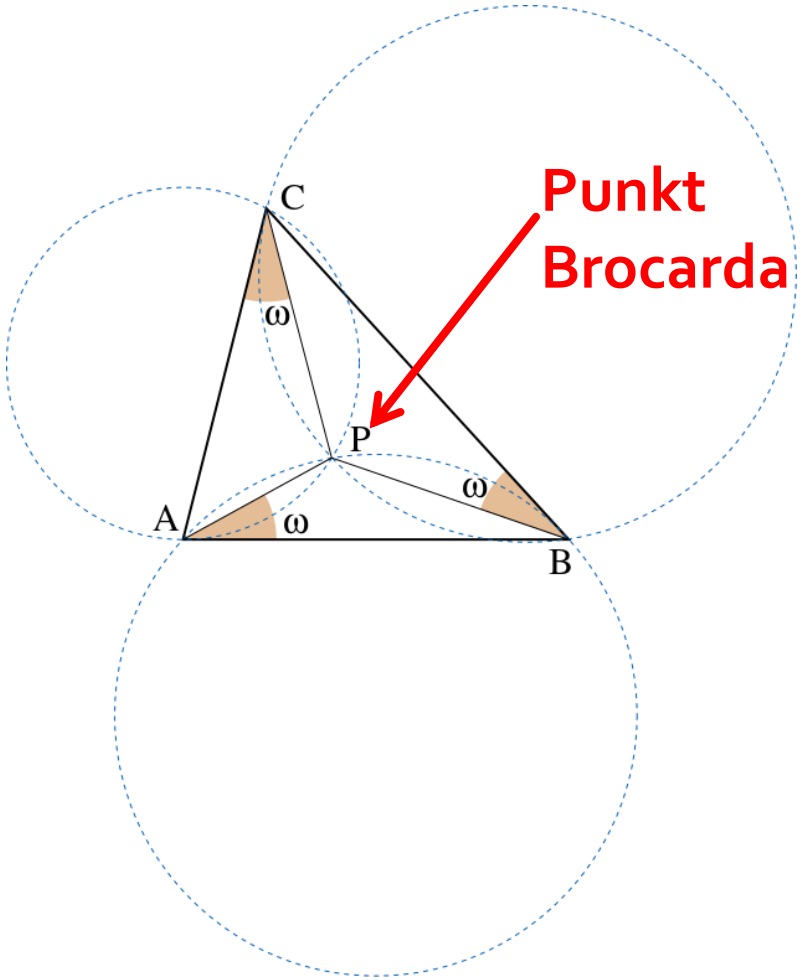
Punkt Nagela



Punkt Brocarda

w trójkącie *ABC* jest to punkt przecięcia się następujących okręgów:

- przechodzącego przez punkty *A*, *B* i stycznego do przedłużenia boku *AC*,
- przechodzącego przez punkty *B*, *C* i stycznego do przedłużenia boku *BA*,
- przechodzącego przez punkty *C*, *A* i stycznego do przedłużenia boku *CB*.



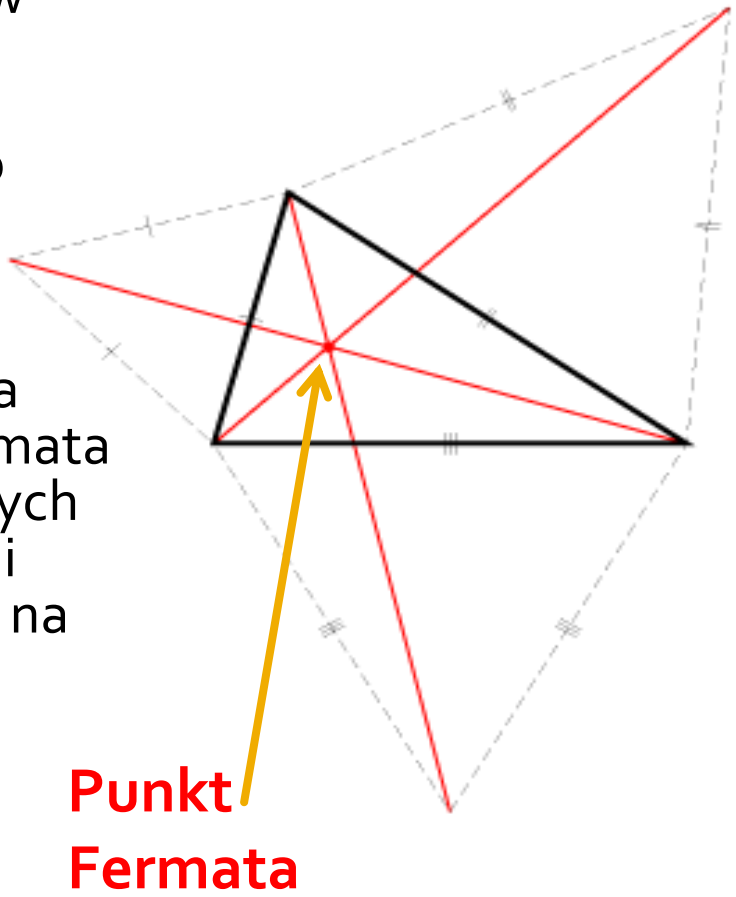
Punkt Brocarda

- Trzy okręgi o tych samych cięciwach, lecz styczne do przedłużeń boków w przeciwnych końcach tych cięciw, przecinają się **w drugim punkcie Brocarda trójkąta *ABC***. [Edupedia]

- Punkt Borcarda - w trójkącie ABC o bokach a, b, c znajduje się **dokładnie jeden taki punkt P**, że proste AP, BP, CP z bokami odpowiednio c, a, b tworzą równe kąty. [Wikipedia]

Punkt Fermata

- (punkt Torricellego) to punkt w trójkącie, którego suma odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza z możliwych.
- Pierwszy raz problem konstrukcji takiego punktu został rozwiązany przez Fermata w prywatnym liście.
- W przypadku, gdy wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze niż 120°, punkt Fermata jest punktem przecięcia odcinków łączących wierzchołki trójkąta z tymi wierzchołkami trójkątów równobocznych zbudowanych na przeciwległych bokach, które nie są wierzchołkami wyjściowego trójkąta.



Punkt Fermata

- Gdy jeden z kątów ma miarę co najmniej 120^0, łatwo zauważyć (z nierówności trójkąta), że wierzchołek przy kącie rozwartym ma mniejszą sumę odległości od wierzchołków, niż punkt otrzymany w powyższej konstrukcji. Wierzchołek ten ma wtedy najmniejszą możliwą z takich sum.
- Punkt Fermata jest jednocześnie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach równobocznych
- Z punktu Fermata każdy bok widać pod tym samym kątem 120^0.
- Odcinki zaznaczone na rysunku na czerwono mają równe długości.

Twierdzenie Pitagorasa

- twierdzenie geometrii euklidesowej dotyczące trójkątów prostokątnych, równoważne w istocie jest piątemu pewnikowi Euklidesa o prostych równoległych

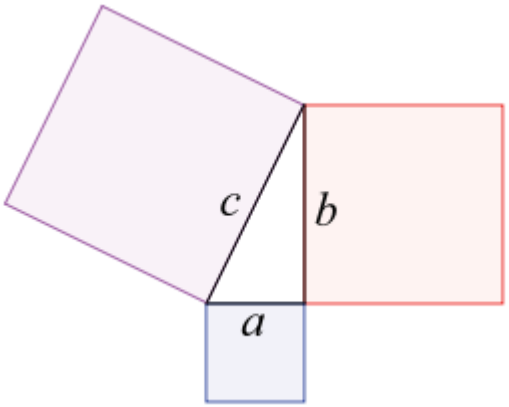
- Treść: W dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

- W zachodnioeuropejskim kręgu kulturowym przypisuje się je żyjącemu w VI wieku p.n.e. greckiemu matematykowi i filozofowi Pitagorasowi, jednak odkrycia dokonali Babilończycy, którzy znali dodatkowo dwie prostsze metody, przy których błąd jest niewielki. Zapewne znali je przed Pitagorasem starożytni Egipcjanie. Wiadomo też, że jeszcze przed nim znano je w starożytnych Chinach i Indiach.

Twierdzenie Pitagorasa

- Nie musi być ono prawdziwe dla „rzeczywistych” trójkątów mierzonych we wszechświecie, w geometrii nieeuklidesowej. Jednym z pierwszych matematyków, którzy zdali sobie z tego sprawę był Carl Friedrich Gauss, który bardzo starannie mierzył wielkie trójkąty w swoich badaniach geograficznych, aby sprawdzić prawdziwość twierdzenia.
- Na powierzchni kuli twierdzenie to nie jest spełnione, gdyż obowiązuje tam geometria sferyczna będąca szczególnym przypadkiem nieeuklidesowej geometrii Riemanna.
- Ogólna teoria względności mówi, że w polach grawitacyjnych twierdzenie jest fałszywe, gdyż tam także obowiązuje zmodyfikowana geometria Riemanna.
- Również w olbrzymich skalach kosmicznych to twierdzenie może być nie spełnione w związku z krzywizną przestrzeni w wielkiej skali – problem krzywizny jest jednym z otwartych problemów.

Twierdzenie Pitagorasa



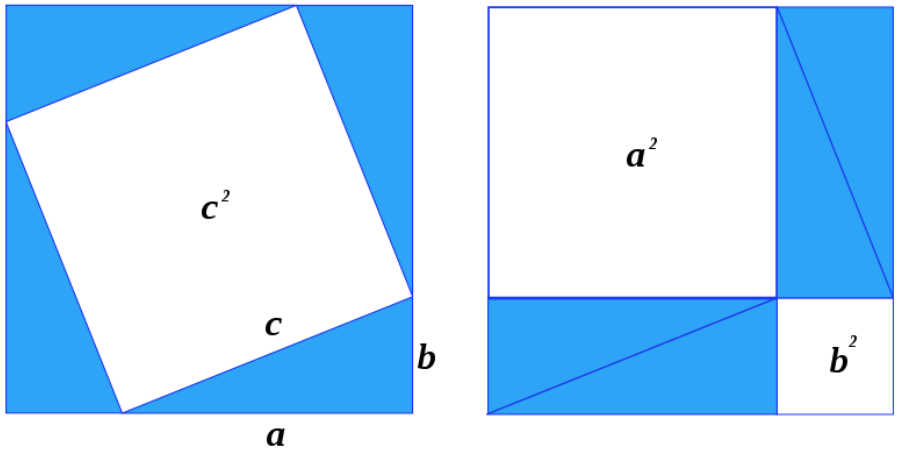
- Liczba różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa jest bardzo duża – Euklides w *Elementach* podaje ich osiem, kolejne pojawiały się na przestrzeni wieków i pojawiają aż po dni dzisiejsze.

- Niektóre z dowodów są czysto algebraiczne (jak dowód z podobieństwa trójkątów), inne mają formę układanek geometrycznych (prawdopodobny dowód Pitagorasa), jeszcze inne oparte są o równości pól pewnych figur.

Twierdzenie Pitagorasa

Dowód – układanka

- Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości *a*, *b* i *c* jak rysunku z lewej.
- Konstruujemy kwadrat o boku długości *c* w sposób ukazany na rysunku z lewej, a następnie z prawej. Z jednej strony pole kwadratu równe jest sumie pól czterech trójkątów prostokątnych i kwadratu zbudowanego na ich przeciwprostokątnych, z drugiej zaś równe jest ono sumie pól tych samych czterech trójkątów i dwóch mniejszych kwadratów zbudowanych na ich przyprostokątnych.
- Stąd wniosek, że pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych.



Szczepan Jeleński
Śladami Pitagorasa

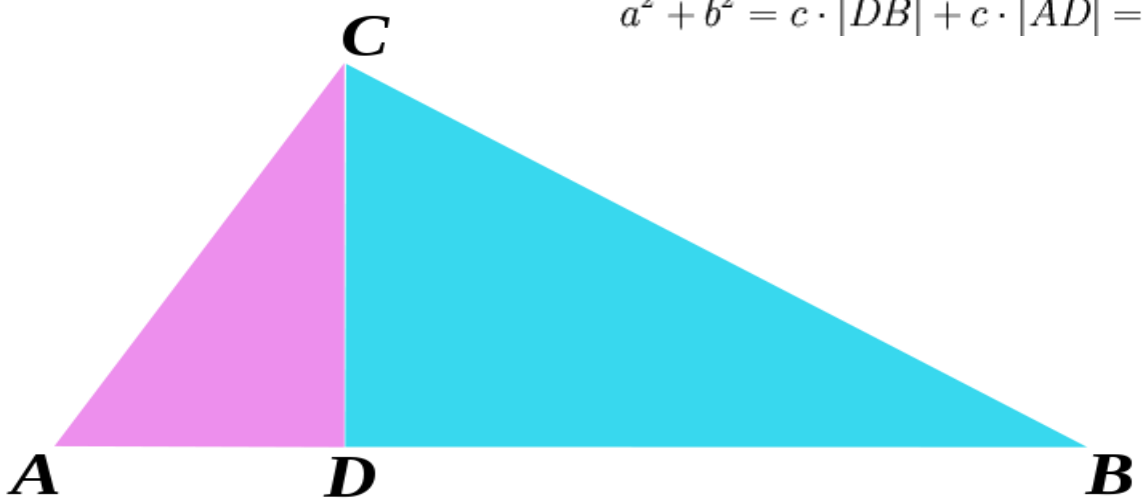
Twierdzenie Pitagorasa

Dowód – podobieństwo trójkątów

- Oznaczmy $|AB| = c, |BC| = a \quad |AC| = b$
- Trójkąty $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{ACD}$ i $\boldsymbol{CBA}$ są podobne (cecha bbb).
- Prawdziwe są proporcje: $\frac{|DB|}{a} = \frac{a}{c} \qquad \frac{|AD|}{b} = \frac{b}{c}$

  czyli: $a^2 = c \cdot |DB| \quad b^2 = c \cdot |AD|$
- Dodajemy stronami i otrzymujemy:

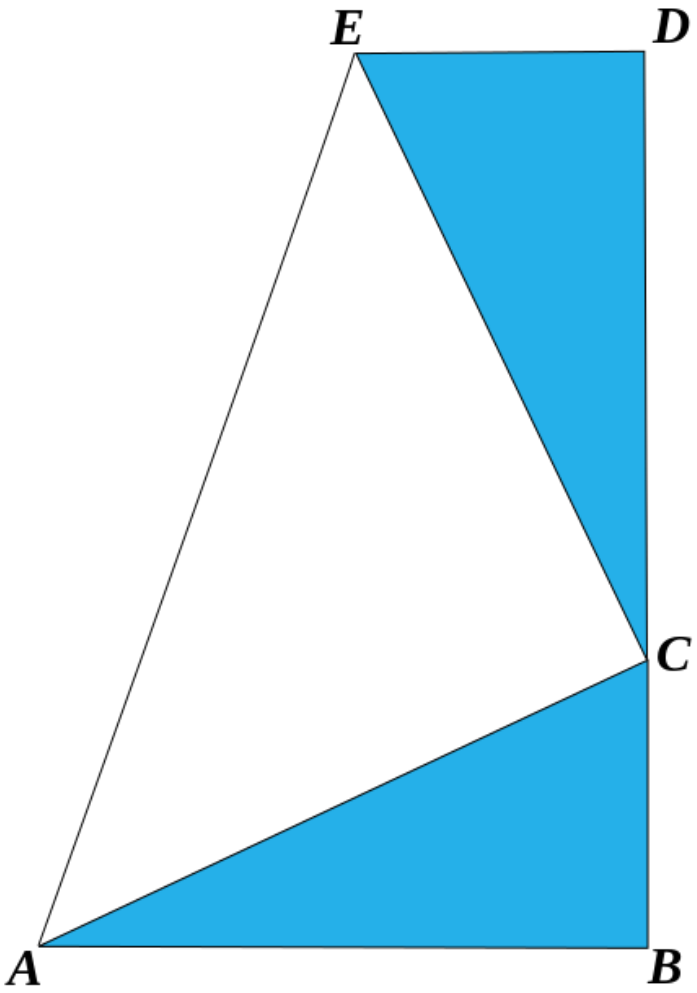
$$a^2 + b^2 = c \cdot |DB| + c \cdot |AD| = c(|DB| + |AD|) = c^2$$



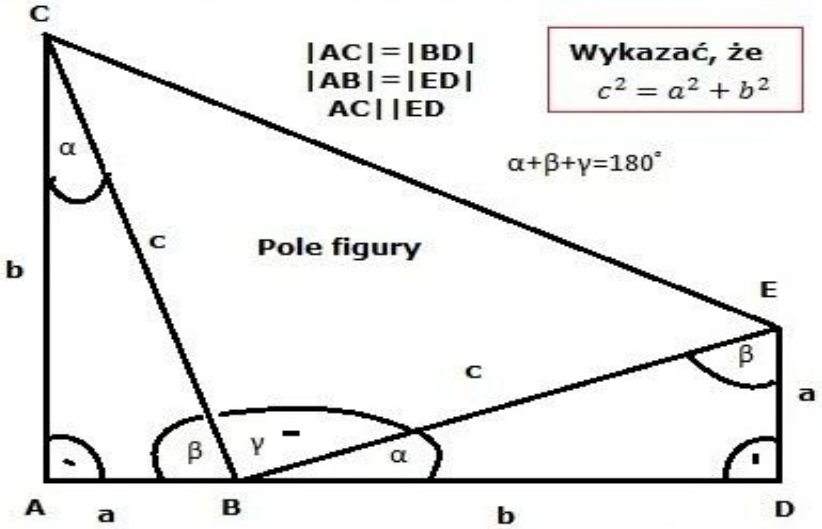
Twierdzenie Pitagorasa

Dowód Garfilda

- Autorem innego dowodu twierdzenia Pitagorasa jest James Garfield, dwudziesty prezydent Stanów Zjednoczonych.
- Dowód ten jest równoważny dowodowi podanemu wyżej (Dowód – układanka).
- Pochodzi z roku 1876.



Dowód Garfielda



Wykazać, że

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$P_F = P_T$$

$$P_F = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$P_F = ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$P_T = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

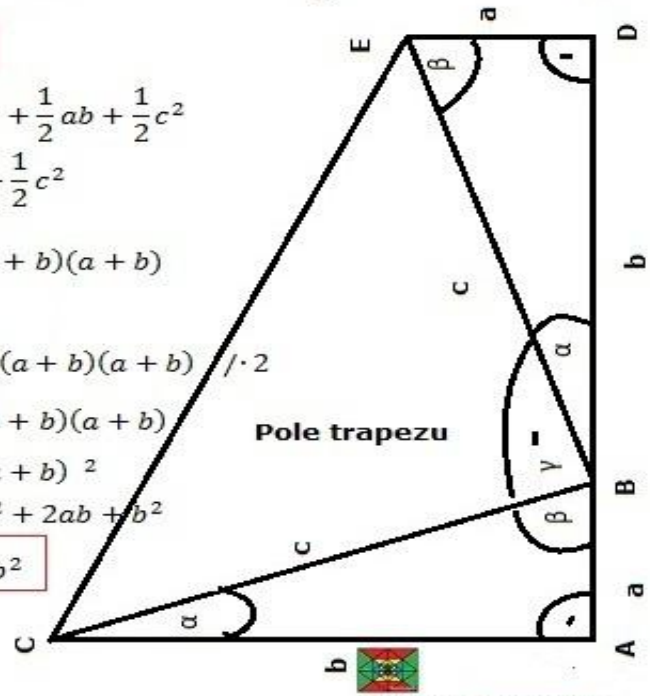
$$ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)(a+b) \quad /\cdot 2$$

$$2ab + c^2 = (a+b)(a+b)$$

$$2ab + c^2 = (a+b)^2$$

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

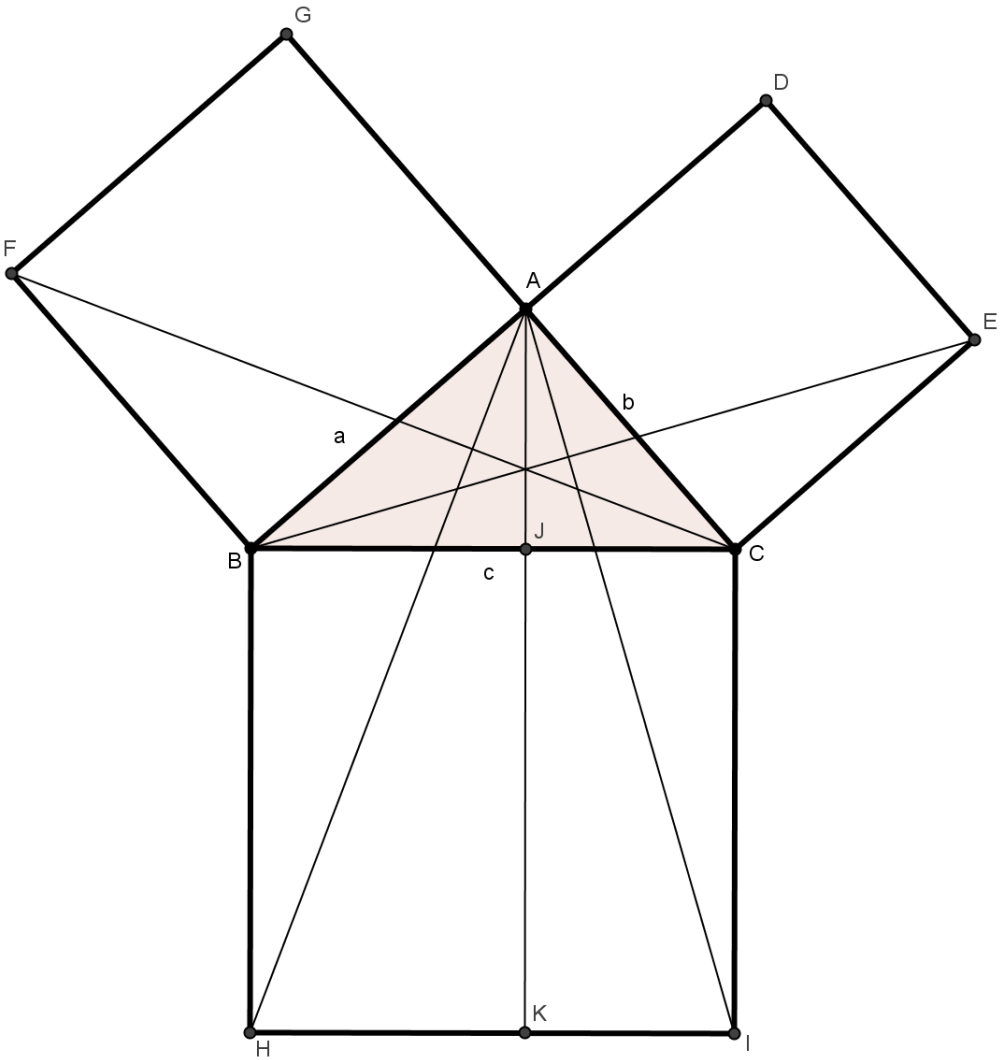


Opracował: Matematyka - Matematyczny Świat wokół nas.

Twierdzenie Pitagorasa

Dowód Euklidesa

Δ BCF $\equiv$ Δ ABH (bkb)
i Pole(ABFG) = 2·Pole Δ BCF
oraz Pole(BJKH) = 2·Pole Δ ABH
więc Pole(BJKH) = Pole(ABFG)
analogicznie:
Pole(CJKI) = Pole(ACED)
więc
Pole(ABFG) + Pole(ACED) =
Pole(BJKI) + Pole(CJKI) = Pole(BCIH)
czyli:
$a^2 + b^2 = c^2$



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Treść:

- Jeśli dane są trzy dodatnie liczby a, b, c i takie, że $a^2 + b^2 = c^2$, to istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c i a kąt między bokami o długości a i b jest prosty.

- Jeżeli w trójkącie kwadrat jednego z boków równa się sumie kwadratów dwóch boków pozostałych, to trójkąt jest prostokątny.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

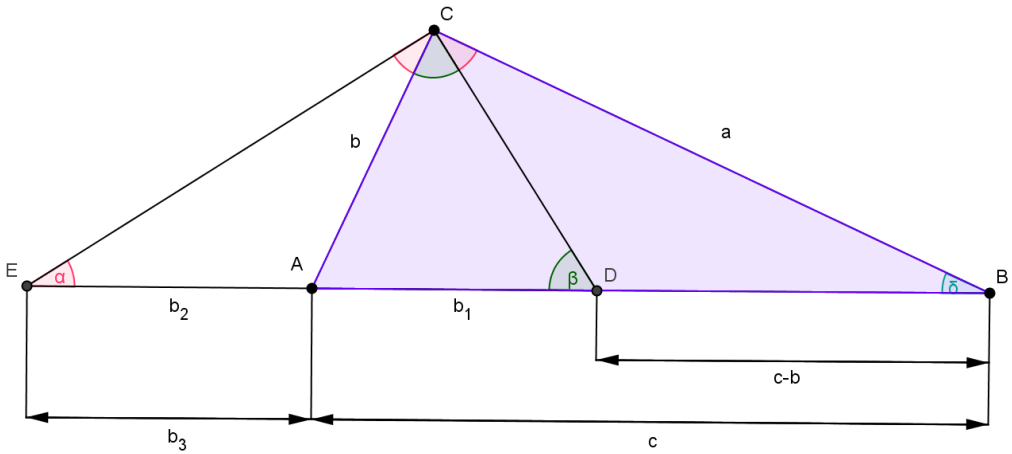
Założenie: $a^2 + b^2 = c^2$

Teza: Kąt ACB jest prosty

Dowód:

$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$

skąd: $$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}$$



Na boku c = AB odkładamy odcinek AD = AE = b. Wówczas DB = c – b.

Z proporcji wynika, że trójkąty DBC i EBC (∠ B jest wspólny) są podobne(bkb), więc

$\angle ECA = \angle CEA = \angle DCB = \alpha = 1/2 \angle CAD$,

$\angle ACD = (180° - \angle CAD):2 = 90° - 1/2 \angle CAD = 90° - \alpha$.

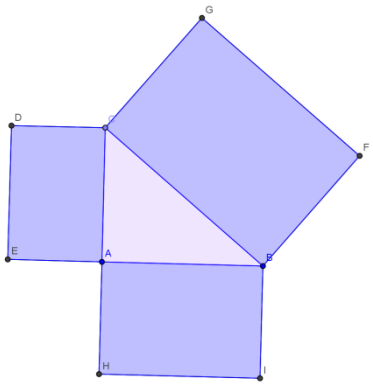
Zatem: $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = (90° - \alpha) + \alpha = 90°$

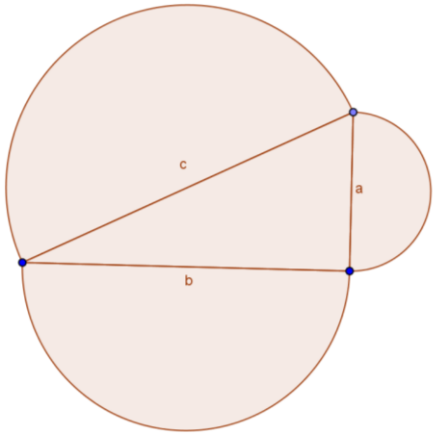
$\angle ACB = 90°$

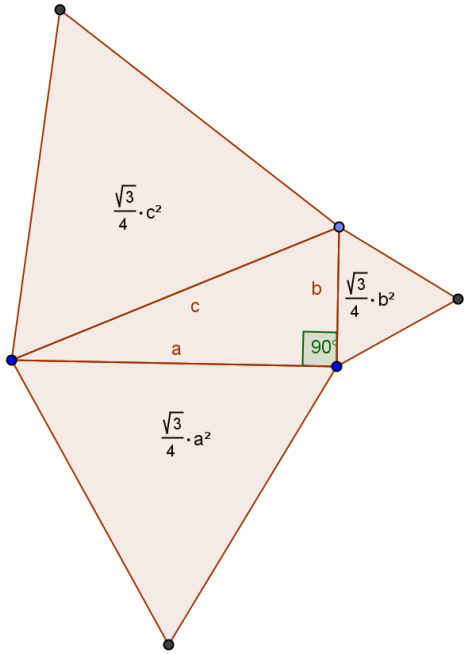
Co należało dowieść.

Uogólnienia twierdzenia Pitagorasa

- W trójkątach prostokątnych pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól figur zbudowanych na przyprostokątnych, podobnych do siebie.
- Kiedy na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy półokręgi tak, by średnicą były boki trójkąta, to suma pól półokręgów zbudowanych na przyprostokątnych będzie równa polu półokręgu zbudowanemu na przeciwprostokątnej.
- Tak samo jest z trójkątami równobocznymi oraz prostokątami.

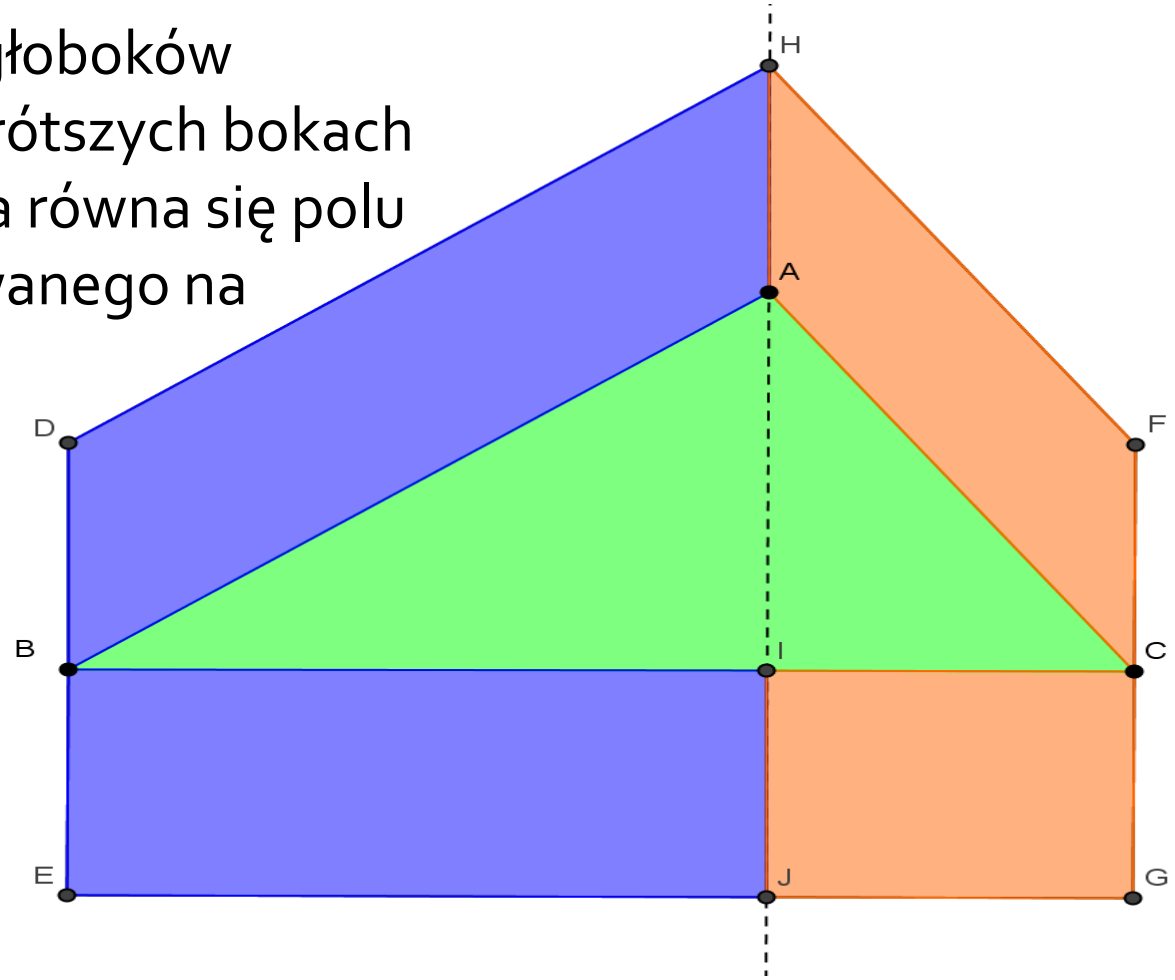




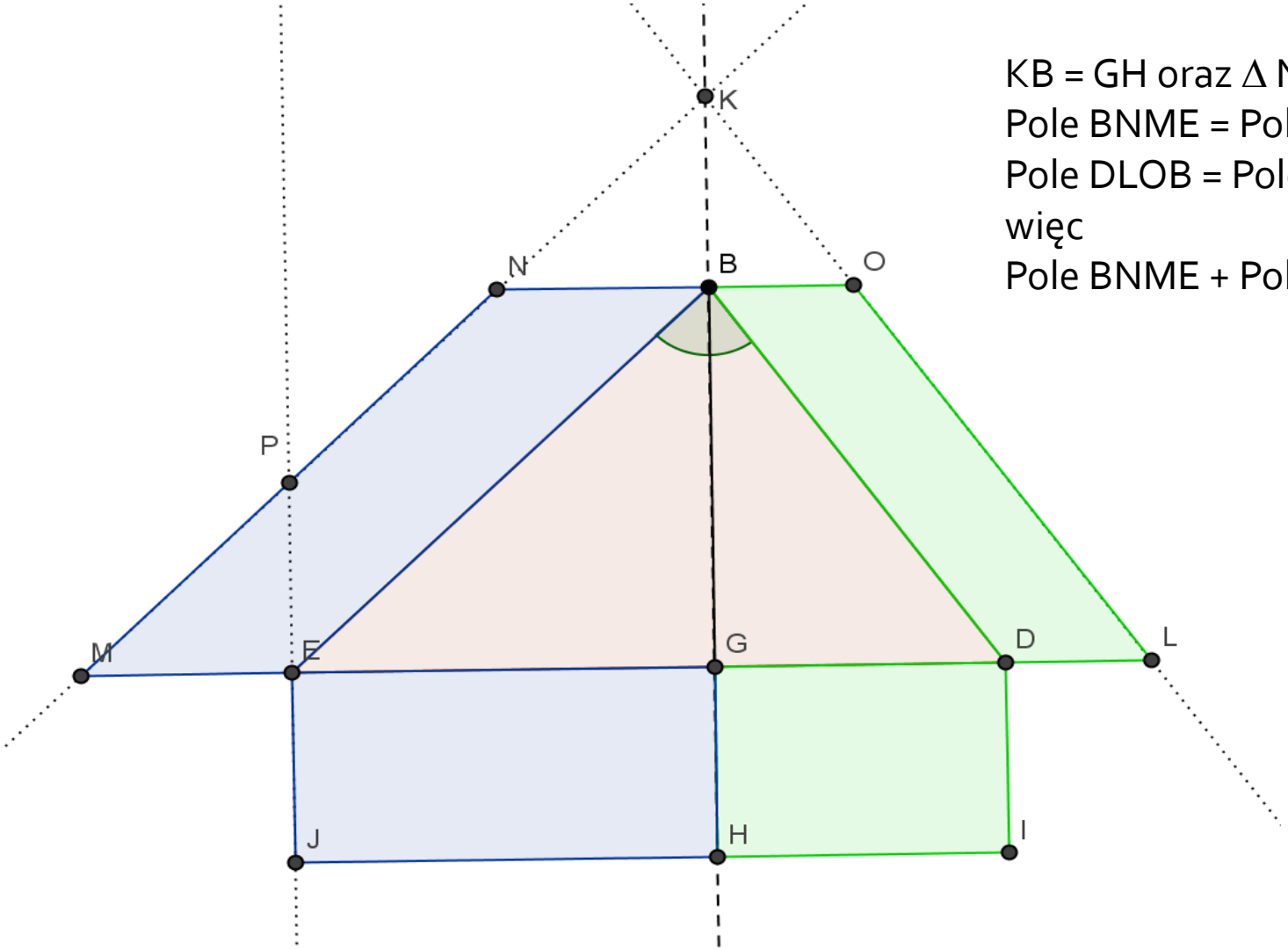


„Domki Pappusa”

Suma pól równoległoboków zbudowanych na krótszych bokach dowolnego trójkąta równa się polu prostokąta zbudowanego na najdłuższym boku.



„Domki Pappusa"



KB = GH oraz Δ NBK $\equiv$ Δ NEP
Pole BNME = Pole EJHG
Pole DLOB = Pole GHID
więc
Pole BNME + Pole DLOB= Pole EDIJ

Księżyce Hipokratesa

- są to figury geometryczne w kształcie księżyców, suma ich pól jest równa polu trójkąta prostokątnego ABC.

<u>Dowód:</u>

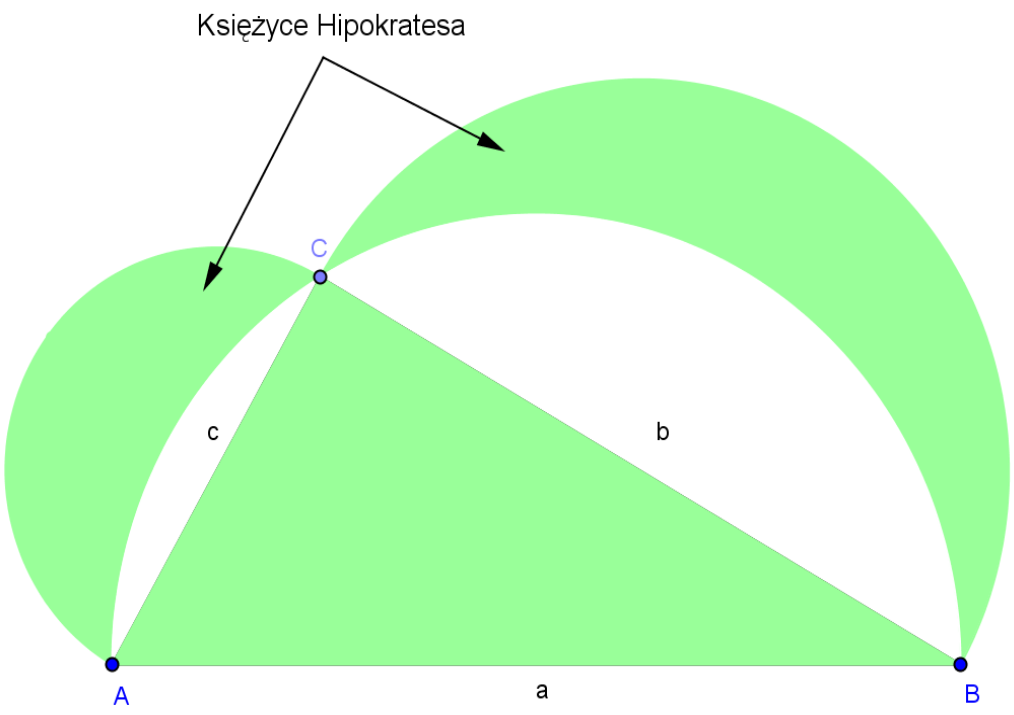
Suma pól księżyców jest równa:

$0{,}5\pi(0{,}5c)^2+0{,}5\pi(0{,}5b)^2-[0{,}5\pi(0{,}5a)^2-(bc)/2]=0{,}125\pi(c^2+b^2-a^2)+(bc)/2$

Z twierdzenia Pitagorasa wiadomo, że: $a^2=b^2+c^2$, więc:

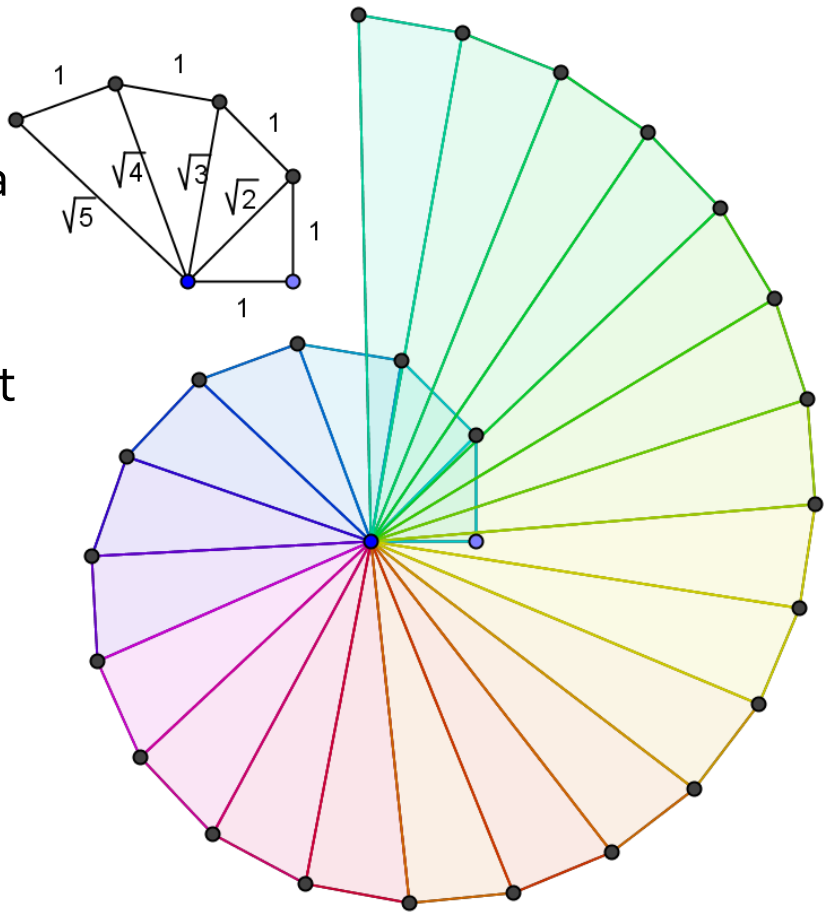
$0{,}125\pi(c^2+b^2-a^2)+(bc)/2=$
$=0{,}125\pi(a^2-a^2)+(bc)/2=(bc)/2$

Możemy zatem stwierdzić, że suma księżyców jest równa polu trójkąta ABC.



Ślimak Teodorosa

- Konstrukcja geometryczna pozwalająca stworzyć odcinek o długości równej pierwiastkowi z liczby naturalnej.
- Przyprostokątne pierwszego trójkąta mają długość 1.
- Konstrukcja złożona jest z trójkątów prostokątnych.
- Każdy kolejny trójkąt zbudowany jest z przyprostokątnej o długości 1 i z przyprostokątnej równej długości przeciwprostokątnej poprzedniego trójkąta.
- Nazwa konstrukcji pochodzi od greckiego matematyka i filozofa Teodorosa z Cyreny.



Liczby pitagorejskie

- **Trójki pitagorejskie** – trzy liczby całkowite dodatnie spełniające równanie Pitagorasa.

- W tabeli przedstawiono kilka pierwszych trójek pitagorejskich

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15

- Jeżeli trójka (a, b, c) jest pitagorejska, to jest nią też (da, db, dc), dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej d.

- Trójkę pitagorejską nazywamy **pierwotną**, jeśli a, b i c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

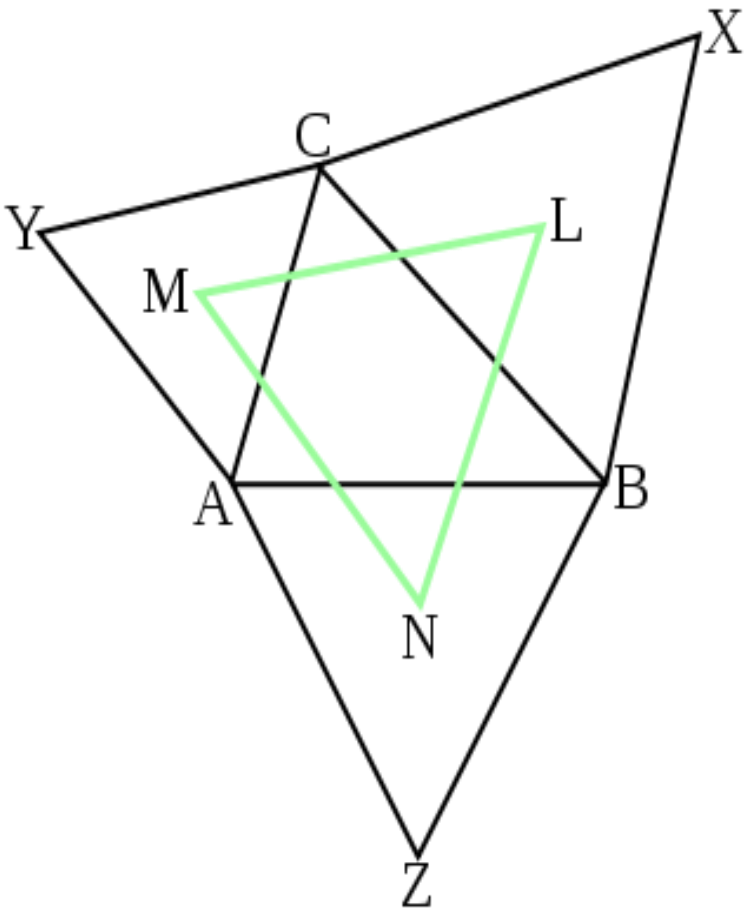
- Trójkąt, którego długości boków stanowią trójkę pitagorejską, nazywany jest **trójkątem pitagorejskim**. Z kolei trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 nazywa się **trójkątem egipskim**.

Twierdzenie Napoleona

Treść:

- Ortocentra trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

- Tradycyjnie przypisuje się je Napoleonowi Bonaparte, choć nie ma żadnych dowodów na jego wkład w sformułowanie bądź udowodnienie twierdzenia.



Twierdzenie Napoleona

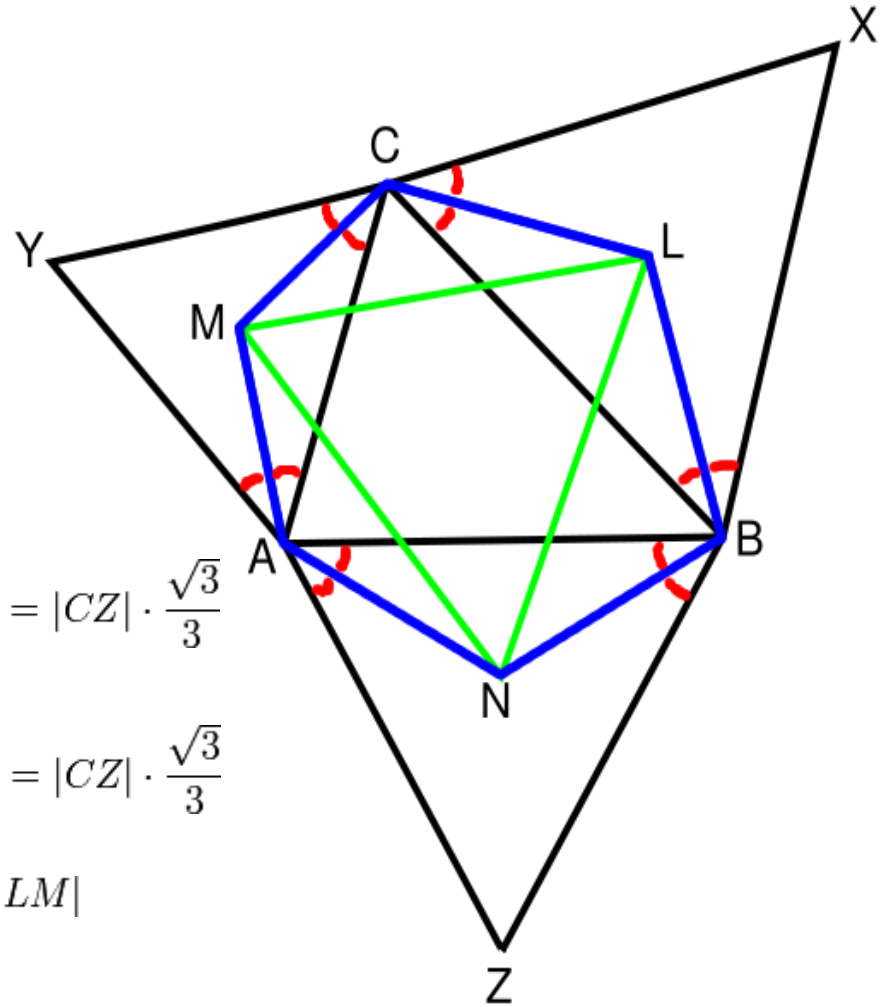
Dowód:

- Ponieważ trójkąty zbudowane na bokach trójkąta ABC są równoboczne, to kąty zaznaczone na rysunku na czerwono mają miarę 60° oraz $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|CL|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  Stąd $\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAZ$

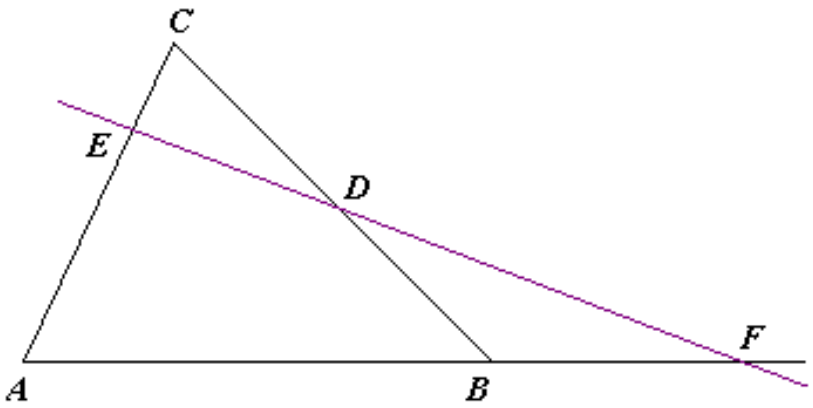
- Ponieważ $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AB|}$ więc trójkąty AMN i ACZ są podobne. Zatem $|MN| = |CZ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Analogicznie pokazujemy, że BLN i BCZ są podobne, więc $|LN| = |CZ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Stąd $|LN| = |MN|$.
- Analogicznie pokazujemy, że $|LN| = |LM|$ więc $\triangle LMN$ jest równoboczny.



Twierdzenie Menelaosa

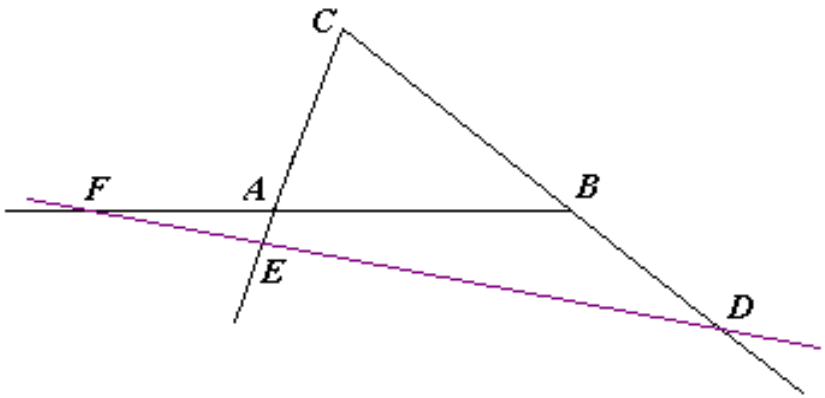
- twierdzenie geometrii płaskiej pochodzące od Menelaosa z Aleksandrii, choć znane było już wcześniej



- Jest przydatne przy wykazywaniu współliniowości punktów (tzn. że leżą one na wspólnej prostej).

- Dowolna poprzeczna wyznacza na dwóch bokach trójkąta *ABC* i przedłużeniu trzeciego boku (lub na przedłużeniach wszystkich boków) punkty *D*, *E*, *F* w ten sposób, że

$$\frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} = 1$$



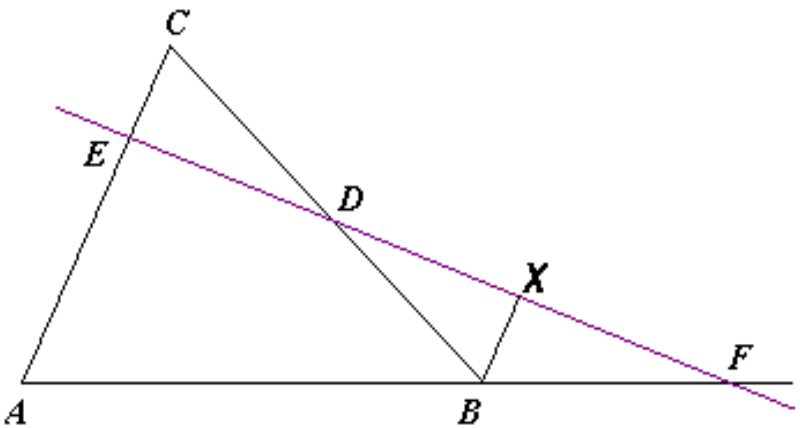
Twierdzenie Menelaosa

Dowód:

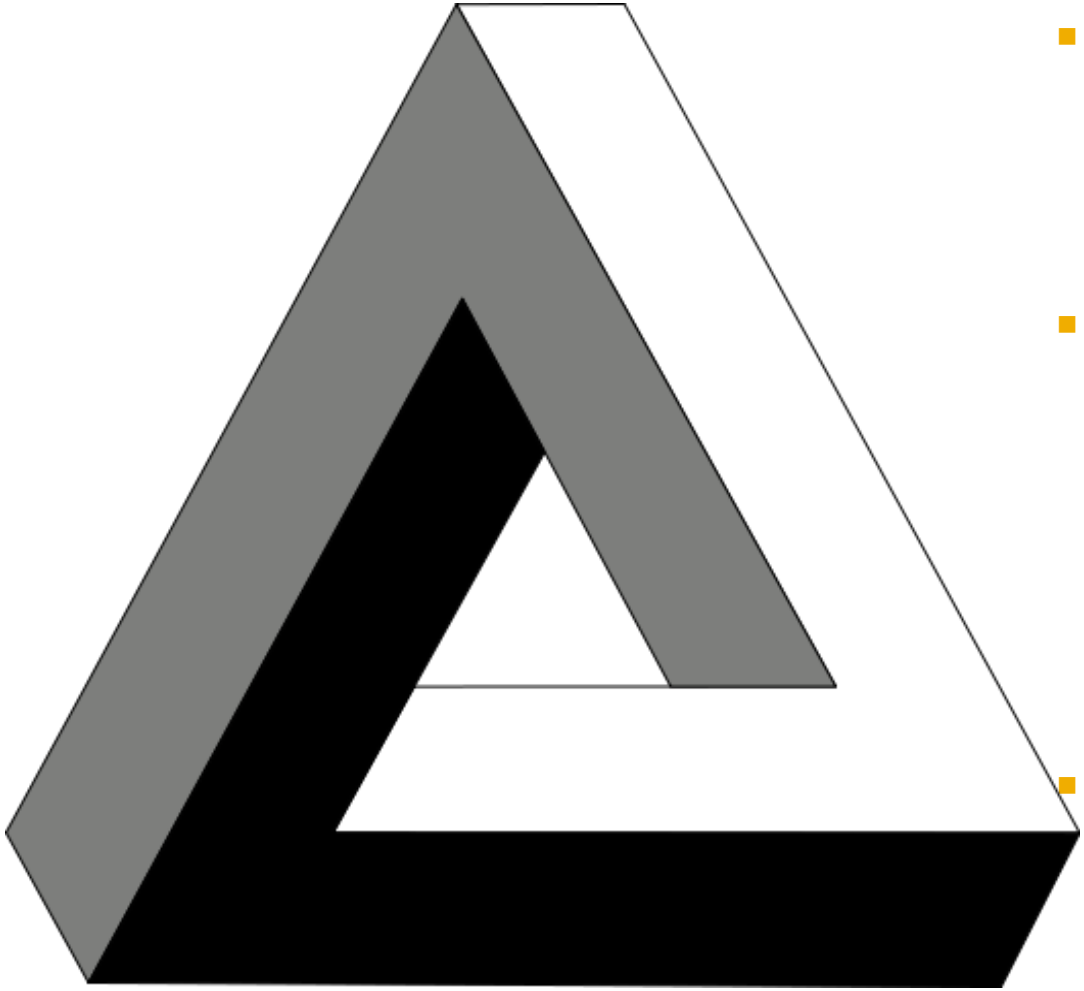
- Niech X będzie punktem przecięcia prostej równoległej do AC przechodzącej przez punkt B z poprzeczną. Trójkąty XBF i EAF są podobne.
- Z tw. Talesa: $\frac{|BX|}{|AE|} = \frac{|BF|}{|FA|}$ czyli $|XB| = \frac{|BF|}{|FA|} \cdot |AE|$
- Trójkąty CED i BXD są podobne, zatem $\frac{|CE|}{|XB|} = \frac{|DC|}{|DB|}$ czyli $\frac{1}{|XB|} = \frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{1}{|CE|}$
- Po pomnożeniu stronami powyższych równości otrzymujemy

$$1 = \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|}$$

W przypadku, gdy wszystkie punkty D, E, F leżą na przedłużeniach boków trójkąta, rozumowanie jest analogiczne



Trójkąt Penrose'a



- figura niemożliwa wymyślona przez szwedzkiego grafika Oscara Reutersvärda w 1936 roku.
- Nazwa figury pochodzi od matematyka Rogera Penrose'a, który niezależnie odkrył i spopularyzował ją w latach 50. XX wieku, opisując jako „niemożliwość w jej najczystszej postaci".
- Jest to ważna figura w twórczości holenderskiego grafika Mauritsa Cornelisa Eschera.

Trójkąt Penrose'a

- Trójkąt Penrose'a objawia się jako przedmiot utworzony z trzech równych belek o kwadratowym przekroju, których końce są połączone, tworząc kąty proste, a cała figura ma kształt trójkątny. Belki mogą być od siebie oddzielone jako sześciany lub prostopadłościany i jedynie ułożone w kształt trójkąta Penrose'a.

- Taki układ cech nie może być zrealizowany przez żaden trójwymiarowy obiekt w zwykłej przestrzeni euklidesowej.

- Istnieją trójwymiarowe przedmioty, które obserwowane z odpowiedniej pozycji przedstawiają się jak dwuwymiarowy widok trójkąta Penrose'a. Termin „trójkąt Penrose'a" może oznaczać zarówno dwuwymiarowe odwzorowanie figury, jak i samą figurę niemożliwą.

Trójkąt Penrose'a

- Litografia Eschera *Waterfall* przedstawia wodę, która spływa zygzakowatym kanałem umieszczonym na dwóch bokach trójkątów Penrose'a i kończy bieg dwa piętra wyżej nad początkiem kanału.

- W efekcie końcowy wodospad tworzy trzeci bok obu trójkątów, napędzając ponadto koło wodne.

- Escher podkreślił także, iż aby utrzymać koło w ruchu, należy co jakiś czas uzupełnić ubytek wody spowodowany parowaniem.

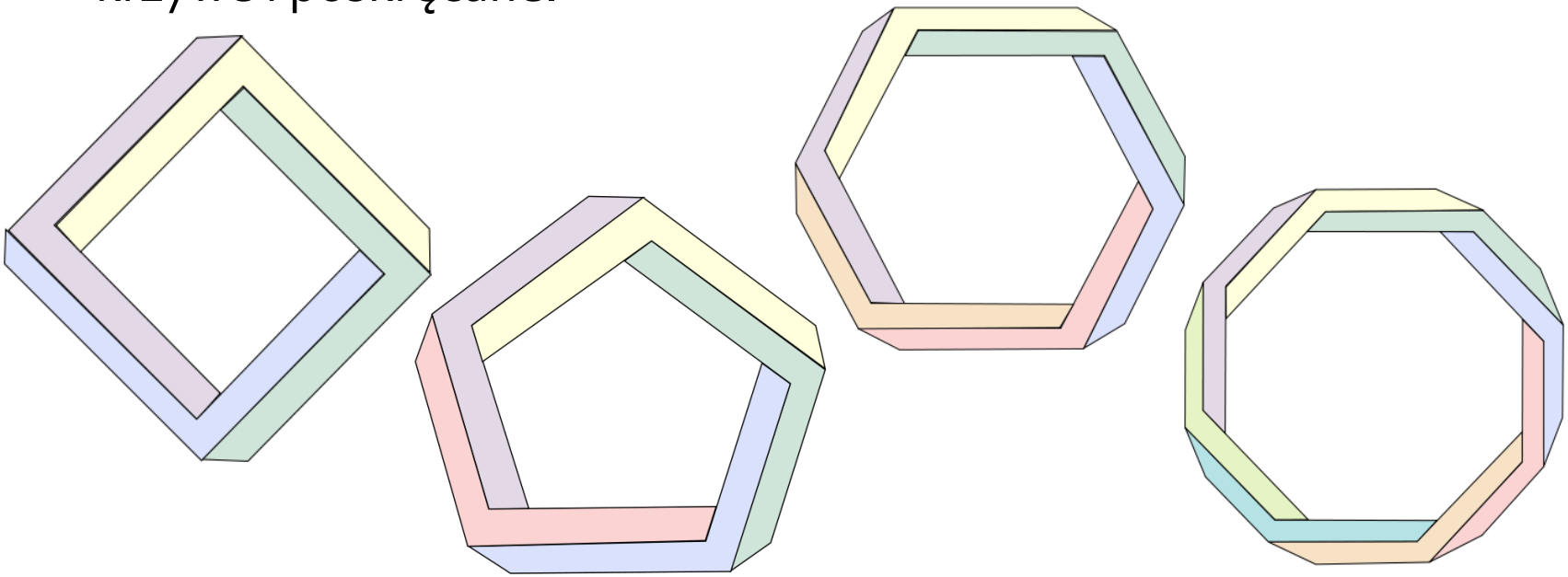
Trójkąt Penrose'a

- Rzeźba niemożliwego trójkąta jako złudzenie optyczne, Perth, Australia Zachodnia

By Bjørn Christian Tørrissen - Own work by uploader, http://bjornfree.com/galleries.html, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6267182

Trójkąt Penrose'a

Farma Iluzji Sp. z o.o., Mościska 9, 08-455 Trojanów

Inne wielokąty Penrose'a

- Jest możliwe tworzenie analogicznych figur jak trójkąt Penrose'a, wykorzystując inne wielokąty foremne, efekt wizualny nie jest jednak tak uderzający.
- Wraz ze wzrostem liczby boków figury wydają się być bardziej krzywe i poskręcane.