Podstawowe pojęcia geometrii

Pojecie pierwotne i aksjomat

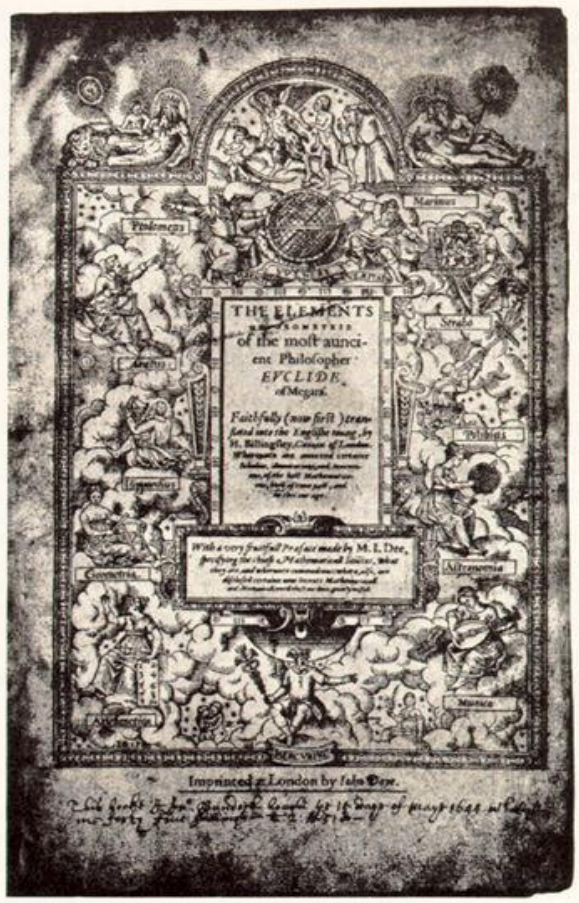
- **POJĘCIE PIERWOTNE** = pojęcie przyjęte bez definicji.
- Pojęcia pierwotne w geometrii to: **PUNKT, PROSTA, PŁASZCZYZNA, PRZESTRZEŃ.**
- **AKSJOMAT** = zdanie, którego prawdziwość przyjmuje się bez dowodu.

Euklides z Aleksandrii

- **ur. ok. 365 r. p.n.e., zm. ok. 300 r. p.n.e.**
- **matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii;**

Euklides był jednym z pierwszych wykładowców słynnej wówczas Szkoły Aleksandryjskiej. Przypuszcza się, że był wychowankiem Akademii Platońskiej, gdzie posiadł głęboką wiedzę mając dostęp do najlepszych prac matematyków i filozofów greckich. Przemawia za tym między innymi cecha "Elementów" - skrupulatne, tak charakterystyczne dla Platona i jego zwolenników, omijanie wszelkich zagadnień mających związek z praktyką.

Euklides z Aleksandrii



Title page of Billingsley's Euclid (1570).

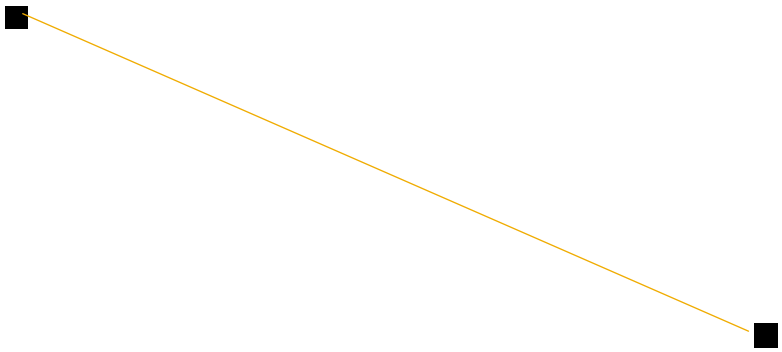
Euklides zajmował się głównie geometrią, a swoje twierdzenia ujął w dziele pt. Elementy, składającym się z 13 ksiąg. Powszechność studiowania tego dzieła porównywano z popularnością Biblii. Przez ponad 2000 lat wszyscy uczniowie zapoznawali się z Elementami jako wstępem do geometrii. Nawet dzisiejsze podręczniki z tej dziedziny są w dużej mierze oparte na metodach i twierdzeniach Euklidesa. Napisał on także inne dzieła, ale tylko nieliczne spośród nich się zachowały.

Euklides z Aleksandrii

Według jednej z anegdot o Euklidesie, król Ptolemeusz I przeglądając "Elementy" zapytał autora, czy nie ma krótszych dróg wiodących do geometrii, na co Euklides odrzekł: **"W GEOMETRII NIE MA DRÓG SPECJALNYCH DLA KRÓLÓW"**.

1. AKSJOMAT EUKLIDESA

- Z dowolnego punktu można poprowadzić prostą do dowolnego innego punktu (**AKSJOMAT NALEŻENIA**) - prawo to mówi, że jeżeli mamy dane na płaszczyźnie 2 punkty nie pokrywające się, możemy je połączyć tylko jedną prostą.



2. AKSJOMAT EUKLIDESA

- Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużać (**AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI**) - prawo to mówi, że każda prosta ma nieskończoną długość i oba jej końce możemy dowolnie przedłużać.

3. AKSJOMAT EUKLIDESA

- Z każdego punktu można zakreślić okrąg o dowolnym promieniu - prawo to mówi, że jeżeli mamy dany punkt, możemy zakreślić okrąg o każdym promieniu.

4. AKSJOMAT EUKLIDESA

- Wszystkie kąty proste są równe - postulat ten mówi, że wszystkie kąty proste maja tą samą miarę, czyli 90 stopni. Prawo to było podstawą do stworzenia wielu twierdzeń.

5. AKSJOMAT EUKLIDESA

- Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z przecinającą je prosta kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch prostych, to te proste, po dostatecznym przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony, z której tworzą te kąty

Geometria euklidesowa

Nazwa *piąty postulat* jest nazwą historyczną, wynikającą z kolejności jego występowania w „Elementach" Euklidesa. Spośród wielu określeń tego postulatu, określenie postulat Euklidesa, choć bardzo popularne, jest nieco mylące, bowiem każdy z pięciu postulatów jest postulatem Euklidesa i w równej mierze konstytuuje geometrię euklidesową. Ostatni z aksjomatów jest **fundamentalnym aksjomatem geometrii euklidesowej**.

Geometrie nieeuklidesowe

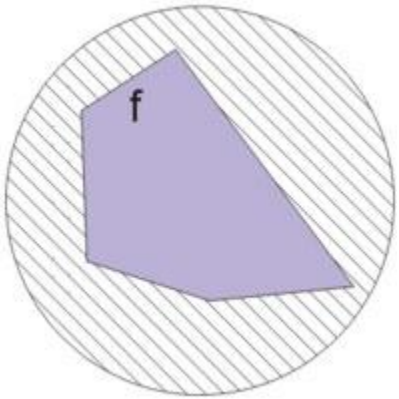
Można zbudować geometrię, która zamiast pewnika Euklidesa zawiera jego zaprzeczenie, a także geometrię opartą jedynie na czterech pierwszych aksjomatach Euklidesa (**geometrie nieeuklidesowe, np. geometria Reimanna i geometria Łobaczewskiego**).

Figura geometryczna

Figura płaska

- **KAŻDY ZBIÓR PUNKTÓW PŁASZCZYZNY** nazywamy figurą płaską.

- Figura płaska jest **OGRANICZONA**, gdy istnieje koło, w którym ta figura się zawiera.



- Figura płaska jest **NIEOGRANICZONA**, gdy nie jest zawarta w żadnym kole.

Punkt

- **PUNKT** to najmniejszy, bezwymiarowy obiekt geometryczny.
- **PUNKT** ma zawsze zerowe rozmiary, dwa punkty mogą więc różnić się tylko położeniem.
- Punkty zaznacza się na rysunku jako × (krzyżyk), kółko lub kropkę i tradycyjnie oznacza wielkimi literami alfabetu łacińskiego (*A*, *B*, *C*).

■ *A*

Punkt cd.

- **PUNKT** jest w przestrzeni euklidesowej pojęciem pierwotnym, co oznacza, że nie jest definiowany z użyciem formalizmu matematycznego. Podobnie jest on pojęciem pierwotnym geometrii Riemanna i geometrii Łobaczewskiego.

- Istnieją jednak przestrzenie matematyczne, w którym punkt może zostać zdefiniowany. Przykładowo nakładając na przestrzeń euklidesową **KARTEZJAŃSKI UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH**, możemy w tak powstałej przestrzeni kartezjańskiej zdefiniować punkt jako parę uporządkowaną (przy większej liczbie wymiarów krotkę) liczb rzeczywistych.

Punkt cd.

- Pierwszą próbę opisania pojęcia punktu podjął Euklides: **PUNKT TO JEST TO, CO NIE SKŁADA SIĘ Z CZĘŚCI (CZEGO NIE MOŻNA ROZŁOŻYĆ NA CZĘŚCI).**

- Dla Euklidesa punkt jest "miejscem" bez wymiarów, co oddał w swoich postulatach czy twierdzeniach. Na przykład: "dwie proste przecinają się w punkcie...", "z punktu można zakreślić okrąg...". Zwykle jednak słowa "punkt" używa się jedynie w odniesieniu do elementów przestrzeni euklidesowej, lub innych przestrzeni geometrycznych (np. wspomniane już przestrzeń Riemanna, przestrzeń Łobaczewskiego, przestrzeń Minkowskiego).

Prosta

- Linia prosta w sensie potocznym różni się od tego, co pod tym pojęciem określa się w matematyce. Potocznie „prosta” oznacza „niezakrzywiona”.

- W geometrii euklidesowej „prosta” albo „linia prosta”, oprócz tego, że nie jest zakrzywiona, musi rozciągać się nieograniczenie w obydwie strony i mieć zerową „grubość”.

- Proste oznaczamy małymi literami *k, l, m.*

- Prostą przechodzącą przez punkty *A* i *B* nazywamy prostą *AB* i oznaczamy pr. *AB*.

Prosta cd.

- Euklides w „Elementach" prostą definiował tak:
  - linia jest **DŁUGOŚCIĄ BEZ SZEROKOŚCI**,
  - linia jest prosta, jeśli **JEST POŁOŻONA MIĘDZY SWOIMI PUNKTAMI W RÓWNYM I JEDNOSTAJNYM KIERUNKU**.
- Definicja ta z punktu widzenia dzisiejszej matematyki pasuje raczej do odcinka niż do prostej, gdyż ta nie leży „między swoimi punktami", lecz jest nieograniczona. Euklides odróżniał jednak proste od odcinków, pisząc o „liniach przedłużanych w nieskończoność", np. „Linie równoległe są to proste, które leżą na tej samej płaszczyźnie i przedłużone z obu stron w nieskończoność, z żadnej strony nie przetną się". Było to spowodowane próbą ominięcia trudności związanych z nieskończonością aktualną (prosta jako całość jest „nieskończona") poprzez wyrażenie jej jako nieskończoność potencjalną (możliwość nieograniczonego przedłużania odcinka).

Prosta cd.

- W klasycznej geometrii euklidesowej, prosta jest tzw. pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym formalnie w obrębie danej teorii. Można ją jednak interpretować za pomocą pojęć wykraczających poza geometrię, np. jako **ZBIÓR PUNKTÓW O WSPÓŁRZĘDNYCH SPEŁNIAJĄCYCH PEWNE RÓWNANIE**.

- W matematyce rozważane są także inne geometrie, takie jak geometria powierzchni kuli. Pojęcie prostej można uogólnić także na geometrie nieeuklidesowe. Odpowiednikiem prostych są wówczas tzw. linie geodezyjne, czyli krzywe określające lokalnie najkrótsze drogi między punktami.

Prosta - własności

- **PRZEZ DWA NIEIDENTYCZNE PUNKTY PRZESTRZENI PRZECHODZI TYLKO JEDNA PROSTA**.
- Prosta przechodząca przez dwa różne punkty płaszczyzny zawiera się w tej płaszczyźnie.
- Prosta na płaszczyźnie jest **ZBIOREM PUNKTÓW JEDNAKOWO ODDALONYCH OD DWÓCH USTALONYCH PUNKTÓW**.
- Każdy punkt płaszczyzny lub przestrzeni należy do nieskończenie wielu prostych. Ich zbiór zwany jest **PĘKIEM PROSTYCH**.
- Każda prosta dzieli płaszczyznę, w której się zawiera, na dwa obszary (półpłaszczyzny) i jest brzegiem każdego z nich.

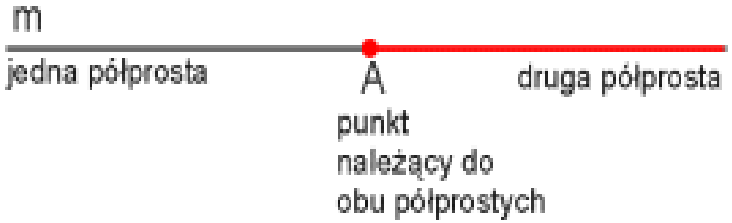
Prosta – własności cd.

- Każdy punkt na prostej dzieli ją na dwie części zwane **PÓŁPROSTYMI**.
- Najkrótsza droga pomiędzy dwoma dowolnymi punktami prowadzi po prostej.
- Prosta jest **CZĘŚCIĄ WSPÓLNĄ** dowolnych dwóch nierównoległych płaszczyzn.
- **PROMIEŃ KRZYWIZNY** (dla większej liczby wymiarów – wszystkie promienie krzywizny) w każdym jej punkcie jest nieskończony.
- Proste są jedynymi krzywymi gładkimi o zerowej **KRZYWIŹNIE** w każdym punkcie.
- Każda prosta ma nieskończoną liczbę **OSI SYMETRII**.
  Osią taką jest ona sama oraz każda prosta prostopadła do niej.

Półprosta

- Jeśli niezakrzywiona linia o zerowej grubości rozciąga się nieograniczenie tylko w jedną stronę, a z drugiej strony ma zakończenie, to jest nazywana **PÓŁPROSTĄ**.

- **PÓŁPROSTĄ** to figura geometryczna składająca się z punktów prostej leżących po jednej stronie pewnego punktu tej prostej. Punkt ten jest nazywany **POCZĄTKIEM PÓŁPROSTEJ**. Bardzo często do tak określonej półprostej dołącza się początek półprostej i mówimy o **PÓŁPROSTEJ DOMKNIĘTEJ** (z początkiem). W przeciwnym wypadku mówimy o **PÓŁPROSTEJ OTWARTEJ** (bez początku) .



Półprosta cd.

- **PÓŁPROSTĄ** o początku w punkcie *A* i przechodzącą przez punkt *B* oznaczamy jako półprostą *AB*. Niekiedy półprostą nazywa się **PROMIENIEM**. Często wygodnie jest oznaczać przez *A*/*B* promień otwarty wychodzący z punktu *A* i nieprzechodzący przez punkt *B*. Inaczej mówiąc, promień *A*/*B* składa się z tych punktów prostej *AB*, które leżą po przeciwnej stronie punktu *A* niż punkt *B*.

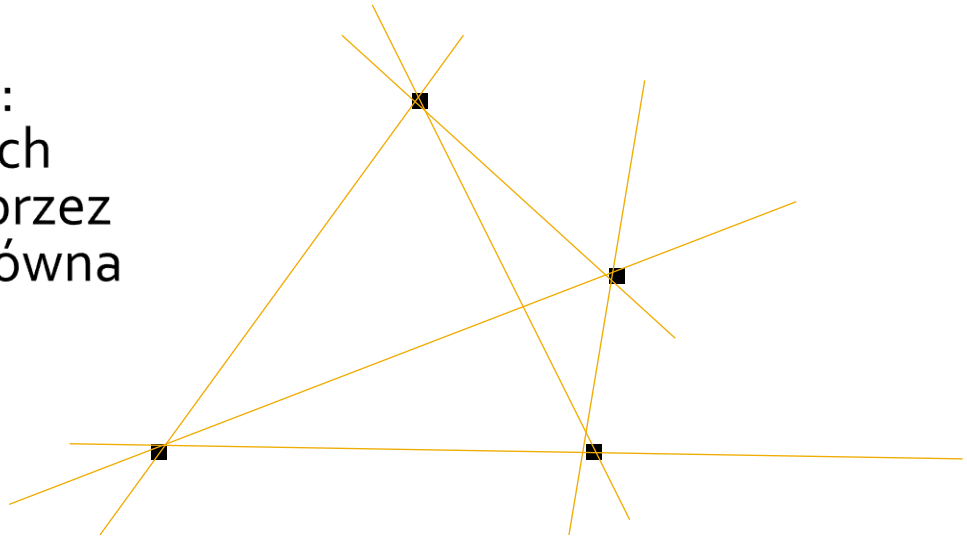
- **PÓŁPROSTĄ** o początku w punkcie *A* można też zdefiniować jako maksymalny podzbiór prostej przechodzącej przez punkt *A*, taki że punkt *A* należy do tego podzbioru, ale nie leży on między żadnymi dwoma innymi punktami tego podzbioru.

Zadanie 1.

- Dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe.
  Ile prostych i półprostych wyznaczają te punkty?

Uogólniając:
Liczba prostych wyznaczonych przez n punktów jest równa

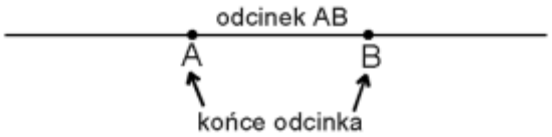
$$\frac{n(n-1)}{2}$$



Odp.: 6 prostych i 12 półprostych.

Odcinek

- Jeśli niezakrzywiona linia o zerowej grubości posiada zakończenia z obydwu stron, to nazywana jest **ODCINKIEM**.



- Odcinek oznaczamy dwiema literami, które wskazują punkty ograniczające go, czyli jego końce, pisząc np. odcinek *AB*. Możemy użyć również małej litery, pisząc np. odcinek *a*. Długość odcinka *AB* oznaczamy symbolicznie |AB|.

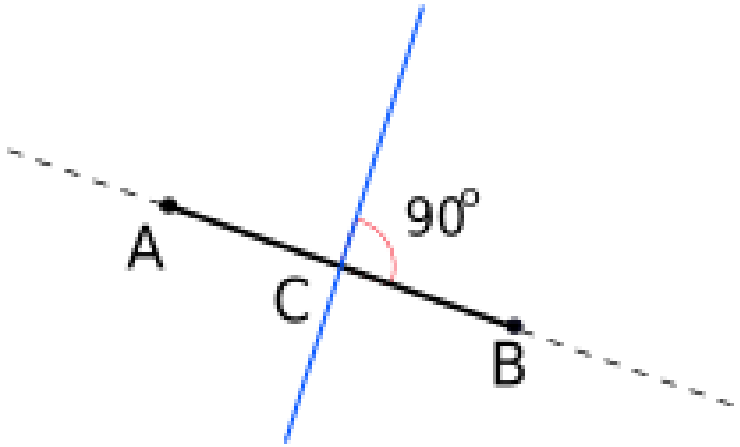
- Jeżeli *A* = *B*, to odcinek *AB* nazywamy **ODCINKIEM ZEROWYM**.

Symetralna odcinka

- **SYMETRALNA ODCINKA** – prosta prostopadła do danego odcinka i przechodząca przez jego środek.

- Równoważnie - prosta będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka. Poprawność drugiej definicji wynika z twierdzenia mówiącego, że taki zbiór punktów faktycznie tworzy prostą.

- Symetralna jest jedną z dwóch osi symetrii odcinka.



Symetralna odcinka

- **KONSTRUKCJA SYMETRALNEJ**

Niech dany będzie odcinek.
Aby skonstruować cyrklem i linijką symetralną tego odcinka należy:

- Zakreślić cyrklem dwa okręgi o środkach w punktach oraz o identycznym promieniu większym od połowy długości odcinka. Okręgi te przetną się w dwóch różnych punktach.
- Poprowadzić prostą przez wyznaczone punkty przecięcia okręgów.
- Wyznaczona prosta jest szukaną symetralną.

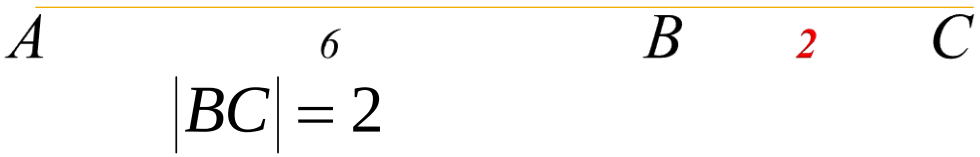
- Uwaga:
  Powyższa konstrukcja jest również stosowana do wyznaczenia środka odcinka ponieważ punkt przecięcia symetralnej z odcinkiem jest właśnie tym środkiem.

Zadanie 2.

- Punkty A, B, C są współliniowe oraz $|AB| = 6 \quad |AC| = 8$

  Narysuj, jak względem siebie położone są punkty A, B, C i oblicz $|BC|$

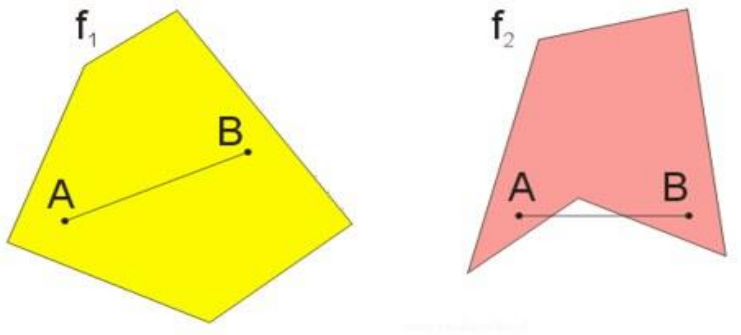
1.przypadek



2.przypadek

Figury wypukłe i wklęsłe

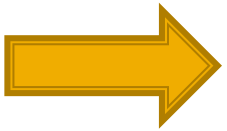
- Definicja:
  FIGURA JEST WYPUKŁA, GDY ZAWIERA KAŻDY Z ODCINKÓW, KTÓREGO KOŃCE DO NIEJ NALEŻĄ



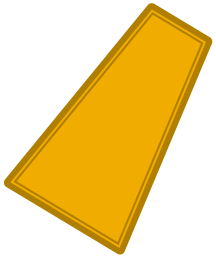
- Gdy figura nie jest wypukła nazywamy ją **WKLĘSŁĄ** albo niewypukłą. Np. okrąg jest wklęsły.

Figury wypukłe i wklęsłe cd.

Wklęsłe czy wypukłe?

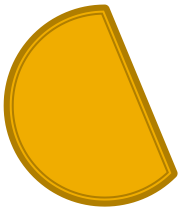


wklęsła

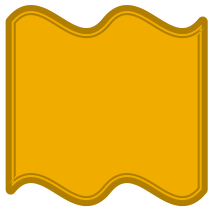


wypukła

wklęsła



wypukła



wklęsła

wypukła

wypukła

wklęsła

wklęsła

wklęsła

Figury wypukłe i wklęsłe cd.

- Twierdzenie:
  CZĘŚĆ WSPÓLNA DWÓCH FIGUR WYPUKŁYCH JEST FIGURĄ WYPUKŁĄ.

- Założenie: F, G - figury wypukłe
- Teza: $F \cap G$ - figura wypukła
- Dowód:
  Weźmy dowolne punkty A, B i załóżmy,
  że $A, B \in F \cap G$. Z definicji iloczynu zbiorów wynika,
  że $A, B \in F$ i $A, B \in G$.
  Z założenia, że F jest figurą wypukłą, wiemy, że odcinek
  $AB \subset F$.
  Analogicznie można stwierdzić, że odcinek $AB \subset G$. Zatem
  odcinek AB zawiera się w $F \cap G$, co - wobec tego, że A, B były
  dowolnymi punktami - dowodzi, że $F \cap G$ jest figurą wypukłą.

Figury wypukłe i wklęsłe cd.

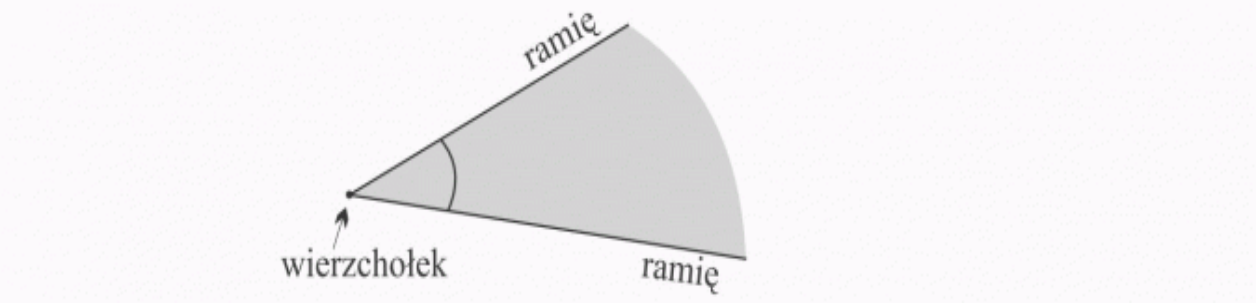
- Twierdzenie ogólniejsze:
  CZĘŚĆ WSPÓLNA SKOŃCZONEJ LICZBY FIGUR WYPUKŁYCH JEST FIGURĄ WYPUKŁĄ.

- Iloczyn figur wklęsłych może być zarówno figurą wklęsłą jak i figurą wypukłą.

- Każda figura geometryczna jest albo wypukła, albo wklęsła. Figurami wypukłymi jak i wklęsłymi mogą być sumy jak i różnice figur wypukłych.

Kąt

- Kąt to obszar powstały z rozcięcia płaszczyzny przez sumę dwóch półprostych o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi. Półproste nazywane są **RAMIONAMI KĄTA**, wspólny początek półprostych nazywany jest **WIERZCHOŁKIEM KĄTA**.



- Kąt liczbowo wyrażony w jednostkach kąta nazywa się **MIARĄ KĄTA**. Często, niezbyt precyzyjnie, kątem nazywa się jego miarę.

Jednostki miary kąta

- Miara kąta – wielkość kąta wyrażona w odpowiednich jednostkach.

- W matematyce i jej zastosowaniach teoretycznych używa się **MIARY ŁUKOWEJ**. Jest to długość łuku wyciętego przez kąt z okręgu o promieniu 1 i środku w wierzchołku kąta. Tak określona miara wyraża się liczbą niemianowaną (bezwymiarową) i może przyjmować wartości z zakresu 0 do 2π. Jednostkę miary łukowej nazywamy **RADIANEM**.

- W życiu codziennym używa się zwykle **MIARY STOPNIOWEJ**. Kąt pełny dzielimy na **360 STOPNI KĄTOWYCH** (symbol: °), każdy z nich na **60 MINUT KĄTOWYCH** (symbol: ′), a każdą z nich na **60 SEKUND KĄTOWYCH** (symbol: ″). Ułamki sekund kątowych podawane są już dziesiętnie. Tę właśnie miarę wykorzystuje się w popularnych kątomierzach.

Jednostki miary kąta

- W praktyce militarnej i geodezyjnej stosowany bywa podział kąta pełnego na **400 GRADÓW** (lub **GRADUSÓW**, symbol: ^{g}), z których każdy dzieli się na 100 centygradów (symbol: ^{c}), a każdy z nich na 100 myriogradów (symbol: ^{cc}). Podział taki ułatwia ręczne (pisemne) dodawanie i odejmowanie, ponieważ przeniesienia i pożyczki wykonuje się jak przy zwykłych liczbach dziesiętnych, bez konieczności przeliczania na 60 i 90 jednostek.

- W pomiarach nachylenia nawierzchni używa się **MIARY PROCENTOWEJ** (np. przy określeniu nachylenia nawierzchni drogi). Przykładowo 1% oznacza górkę o wysokości 1 cm na 100 cm długości.

- **RUMB** to miara kąta uzyskana przez podział okręgu na 32 części. Niegdyś była powszechnie używana w nawigacji morskiej, nieomal całkowicie wyparta przez system 360°. Jeden rumb = 11,25° (0,1963495 rad).

Miara stopniowa

- 1^0 – jeden stopień
- 1^0 to 1/90 kąta prostego
- Stopnie dzielimy na minuty: $1^0 = 60'$
- Minuty dzielimy na sekundy: $1' = 60''$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} radianów$$

Zadanie 3.

- Wyraź miarę 0,73° za pomocą minut i sekund.

Rozwiązanie:

$$0{,}73 = \frac{73}{100} = \frac{(70+3)\cdot 6}{100\cdot 6} = \frac{42}{60} + \frac{18}{600} =$$

$$= \frac{42}{60} + \frac{18\cdot 6}{600\cdot 6} = \frac{42}{60} + \frac{60+48}{60^2} = \frac{43}{60} + \frac{48}{60^2}$$

Odpowiedź: $0{,}73^{o} = 43'48''$

Miara łukowa

- 1 rad – jeden radian
- Radianem nazywamy miarę kąta środkowego opartego na łuku o długości równej promieniowi okręgu

$$1\,radian = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17'45''$$

Zadanie 4.

- Zamień stopnie na radiany:

$$180^{o} = \pi$$

$$30^{o} = \frac{\pi}{6}$$

$$18^{o} = \frac{\pi}{10}$$

$$-300^{o} = -\frac{5}{3}\pi$$

$$225^{o} = \frac{5}{4}\pi$$

$$360^{o} = 2\pi$$

- Zmień radiany na stopnie:

$$\frac{\pi}{18} = 10^{o}$$

$$\frac{3}{2}\pi = 270^{o}$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^{o}$$

$$\frac{5}{6}\pi = 150^{o}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 120^{o}$$

Klasyfikacja kątów

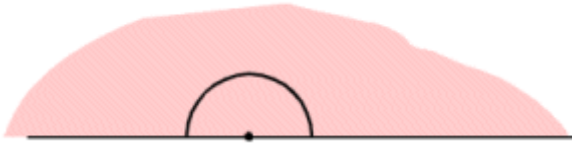
względem ustalonego zakresu ich miar
(używane będą miara łukowa wraz z miarą stopniową podaną w nawiasie)

- Kąt zerowy
- Kąt półpełny
- Kąt pełny
- Kąt prosty
- Kąt ostry
- Kąt rozwarty
- Kąt wypukły
- Kąt wklęsły

Klasyfikacja kątów

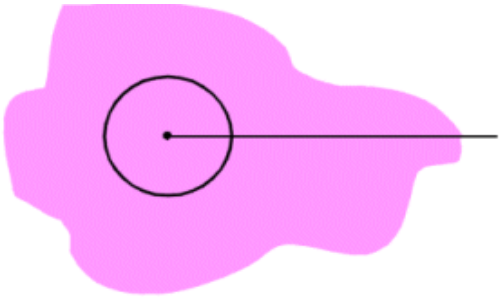
- **ZEROWY** – kąt utworzony przez dwie półproste pokrywające się, a tym samym im równy; jego miara jest równa 0 rad (lub 0°);

- **PÓŁPEŁNY** – każdy z dwu kątów utworzonych przez dwie półproste uzupełniające się do prostej; jego miara wynosi π rad (lub 180°);

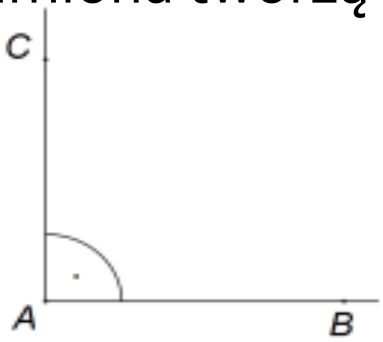


Klasyfikacja kątów

- **PEŁNY** – kąt utworzony przez dwie półproste pokrywające się i równy całej płaszczyźnie; jego miara jest równa 2π rad (lub 360°);

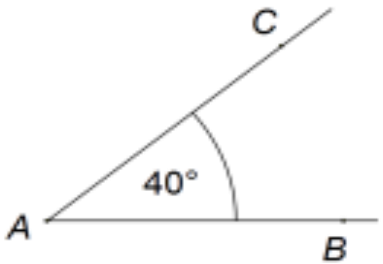


- **PROSTY** – kąt przystający do kąta mającego z nim wspólne jedno tylko ramię, podczas gdy pozostałe ramiona tworzą prostą; jego miara wynosi π/2 rad (lub 90°);

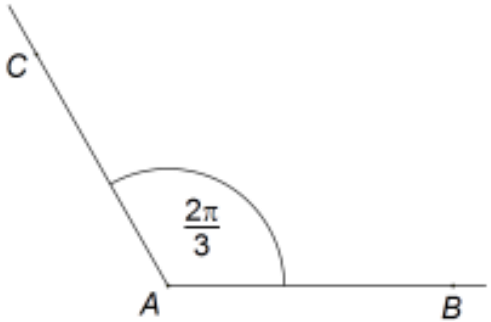


Klasyfikacja kątów

- **OSTRY** – kąt ściśle zawierający się w pewnym kącie prostym; ma miarę większą od 0 rad (lub 0°), lecz mniejszą od π/2 rad (lub 90°);

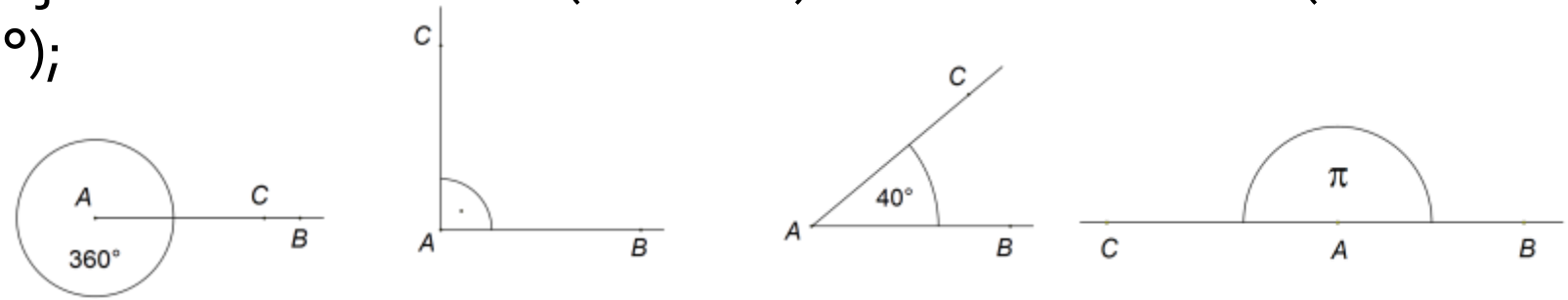


- **ROZWARTY** – kąt ściśle zawarty w pewnym kącie półpełnym, lecz nie będący ani ostrym, ani prostym; ma miarę większą niż π/2 rad (lub 90°), lecz mniejszą niż π rad (lub 180°);

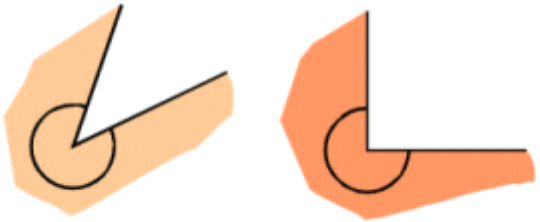


Klasyfikacja kątów

- **WYPUKŁY** – kąt będący figurą wypukłą; miara takiego kąta jest mniejsza lub równa π rad (lub 180°) albo równa 2π rad (lub 360°);



- **WKLĘSŁY** – kąt, który nie jest wypukły; miara takiego kąta jest większa niż π rad (lub 180°), lecz mniejsza niż 2π rad (lub 360°).



Klasyfikacja kątów

- Wyjąwszy przypadek, gdy ramiona kąta uzupełniają się do prostej (oba kąty są wtedy półpełne) lub pokrywają się (jeden z kątów jest wtedy zerowy, a drugi pełny) jeden z kątów można jednoznacznie zidentyfikować jako wypukły, drugi zaś jako wklęsły (w przeciwnym przypadku oba są wypukłe); czasem możliwe jest też wyróżnienie wśród nich kąta rozwartego bądź ostrego.

Klasyfikacja kątów

utworzonych przez dwie proste nierównoległe

- Kąty wierzchołkowe
- Kąty przyległe

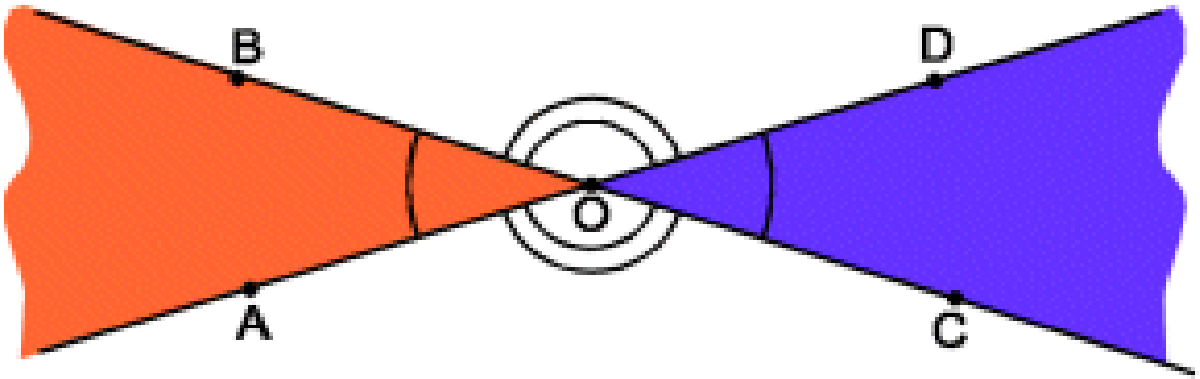
Kąty wierzchołkowe

Definicja:

KĄTY WIERZCHOŁKOWE to dwa kąty wypukłe,
w których ramiona jednego są przedłużeniem ramion drugiego.

Twierdzenie:

Kąty wierzchołkowe mają równe miary.



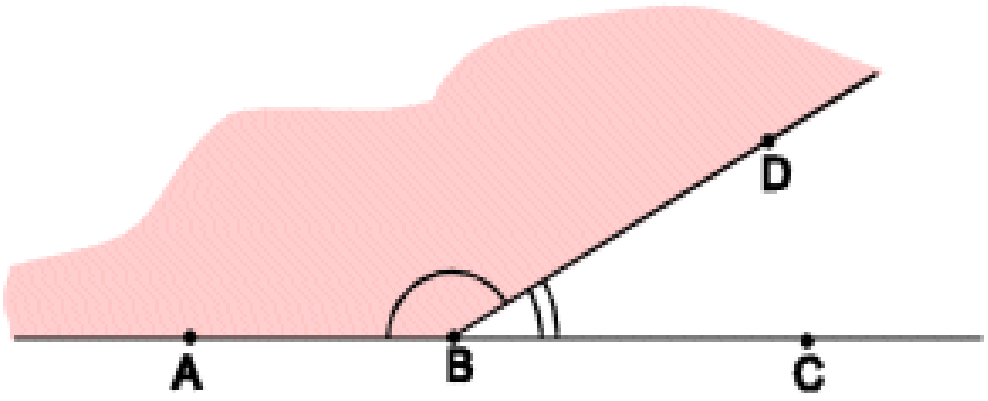
Kąty przyległe

Definicja:

KĄTY PRZYLEGŁE to dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne a pozostałe ramiona tworzą prostą.

Twierdzenie:

SUMA MIAR KĄTÓW PRZYLEGŁYCH WYNOSI 180°



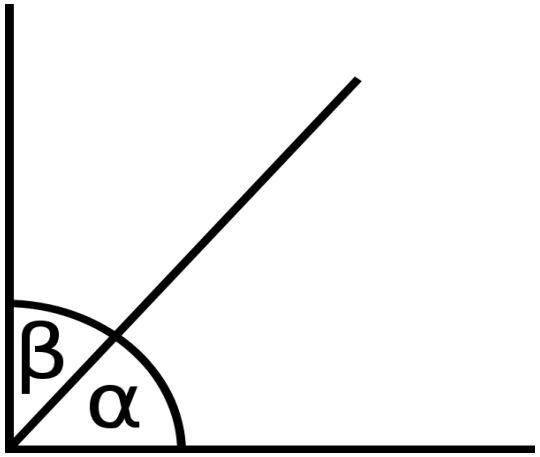
Kąty dopełniające

Definicja:

KĄTY DOPEŁNIAJĄCE to kąty mające jedno wspólne ramię, pozostałe zaś leżące pod kątem prostym.

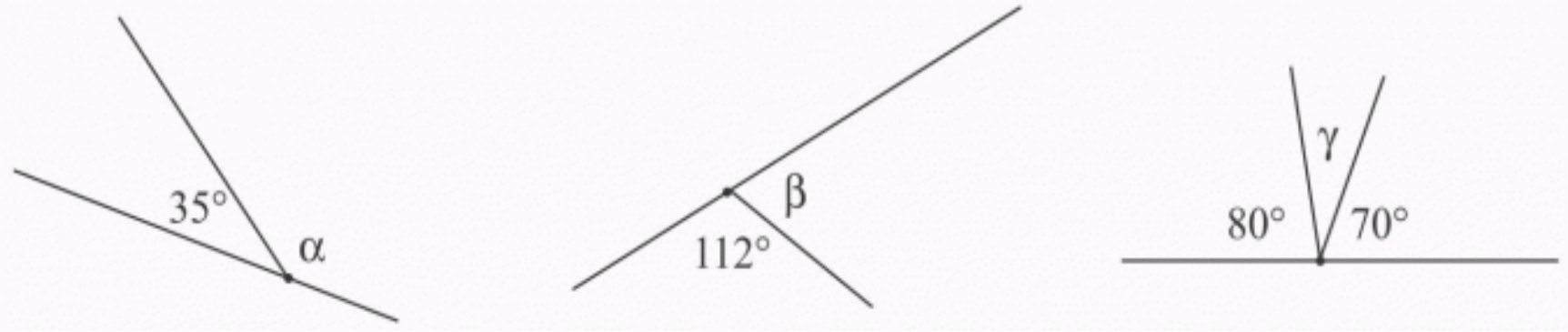
Twierdzenie:

SUMA MIAR KĄTÓW DOPEŁNIAJĄCYCH JEST RÓWNA MIERZE KĄTA PROSTEGO.



Zadanie 5.

Jaką miarę mają kąty: α, β, γ?



α = 145°,
bo α i 35°
to kąty przyległe

β = 68°

γ = 30°,

Zadanie 6.

- Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli jeden z kątów ma miarę o 42° większą od drugiego.

Rozwiązanie:

$$\alpha + \alpha + 42^o = 180^o$$

$$2\alpha = 138^o$$

Odpowiedź:

$$69^o, 111^o$$

- Wyznacz miary katów przyległych, jeśli stosunek ich miar jest równy 3:2.

Rozwiązanie:

$$3\alpha + 2\alpha = 180^o$$

$$\alpha = 36^o$$

Odpowiedź:

$$108^o, 72^o$$

Klasyfikacja kątów

utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią prostą

- Kąty naprzemianległe
- Kąty jednostronne
- Kąty odpowiadające

Kąty naprzemianległe

Kąty naprzemianległe wewnętrzne

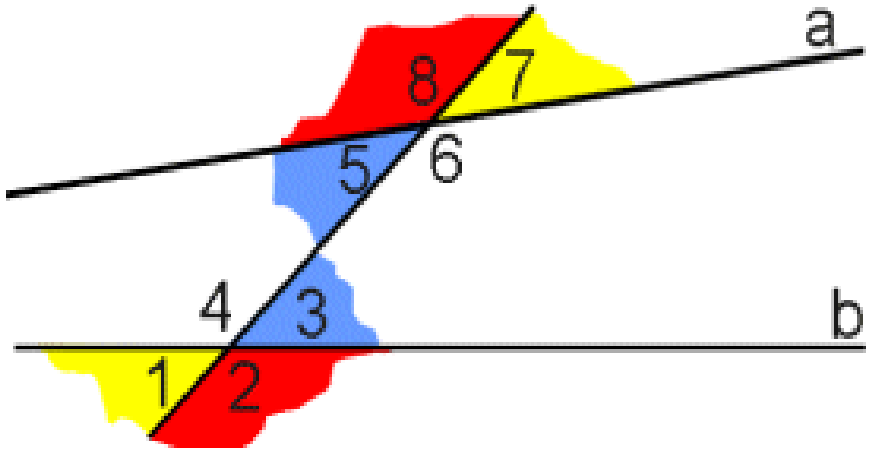
<4 i <6

<3 i <5

Kąty naprzemianległe zewnętrzne

<1 i <7

<2 i <8



Kąty jednostronne

Kąty jednostronne wewnętrzne

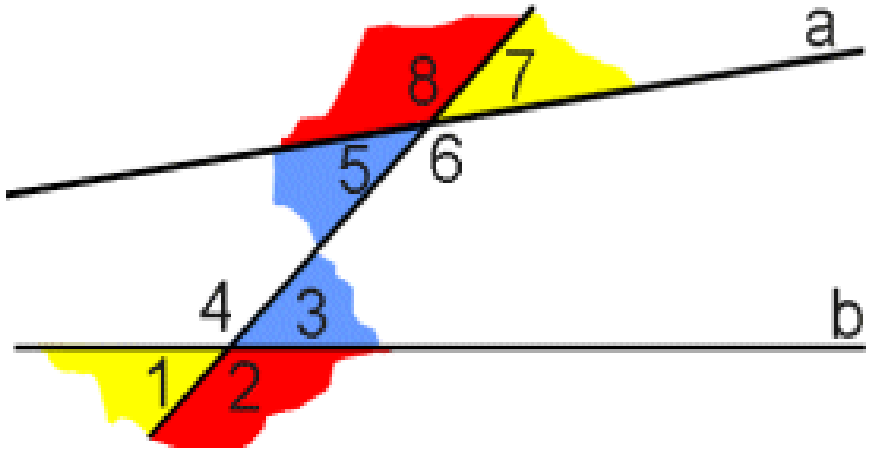
<4 i <5

<3 i <6

Kąty jednostronne zewnętrzne

<1 i <8

<2 i <7



Kąty odpowiadające

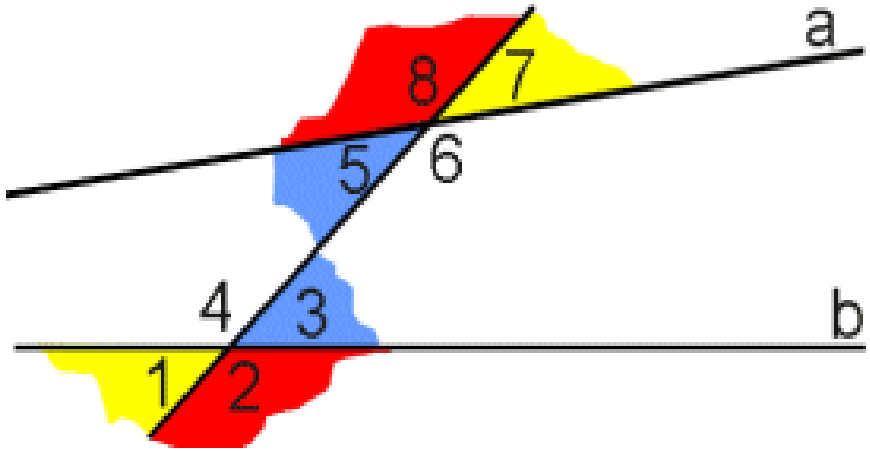
Kąty odpowiadające

<1 i <5

<4 i <8

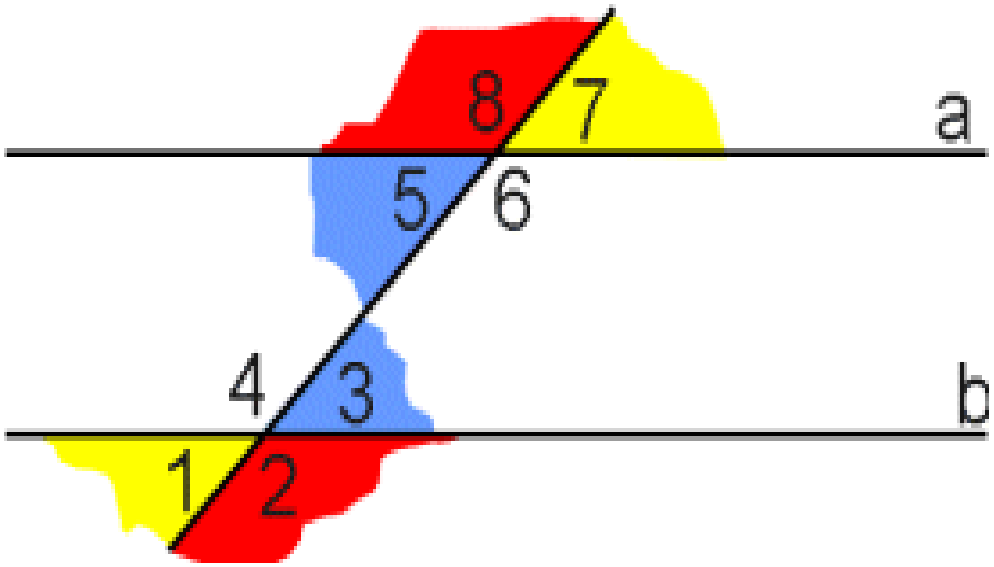
<2 i <6

<3 i <7



Twierdzenie:

JEŻELI DWIE PROSTE RÓWNOLEGŁE A I B SĄ PRZECIĘTE TRZECIĄ PROSTĄ C, TO KĄTY ODPOWIADAJĄCE I NAPRZEMIANLEGŁE SĄ RÓWNEJ MIARY.



Kąty naprzemianległe wewnętrzne

|<4| = |<6|

|<3| = |<5|

Kąty naprzemianległe zewnętrzne

|<1| = |<7|

|<2| = |<8|

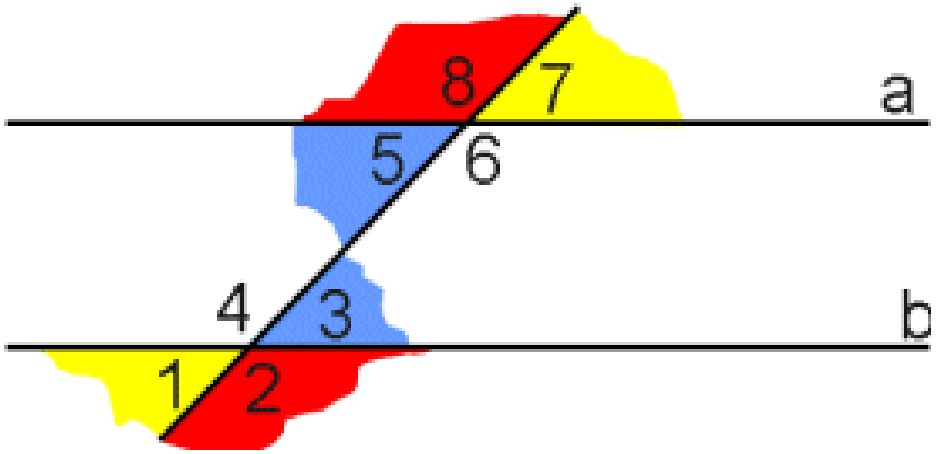
Kąty odpowiadające

|<1| = |<5|

|<4| = |<8|

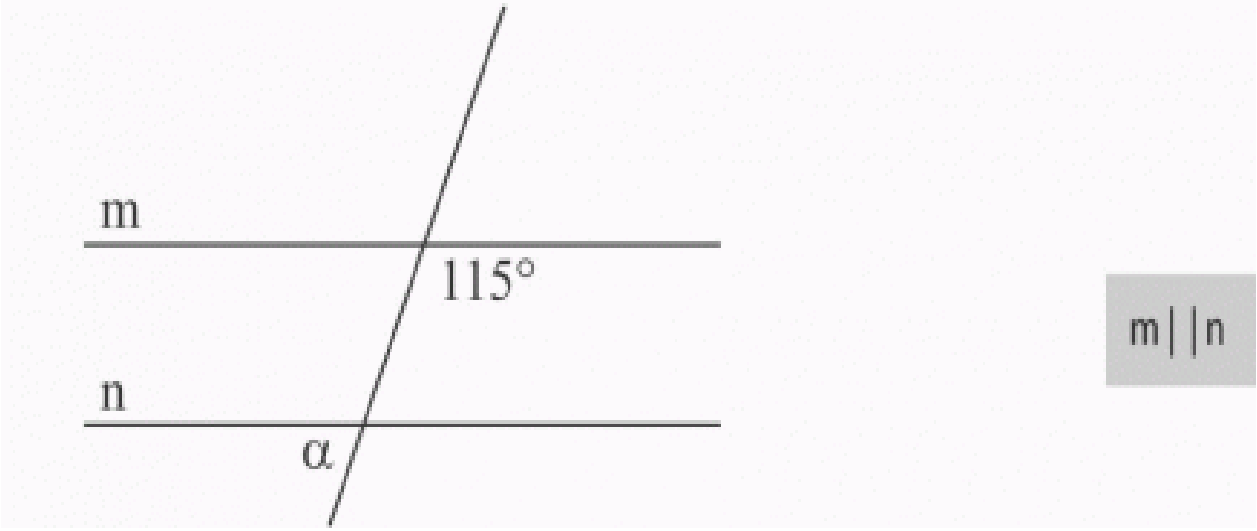
|<2| = |<6|

|<3| = |<7|



Zadanie 7.

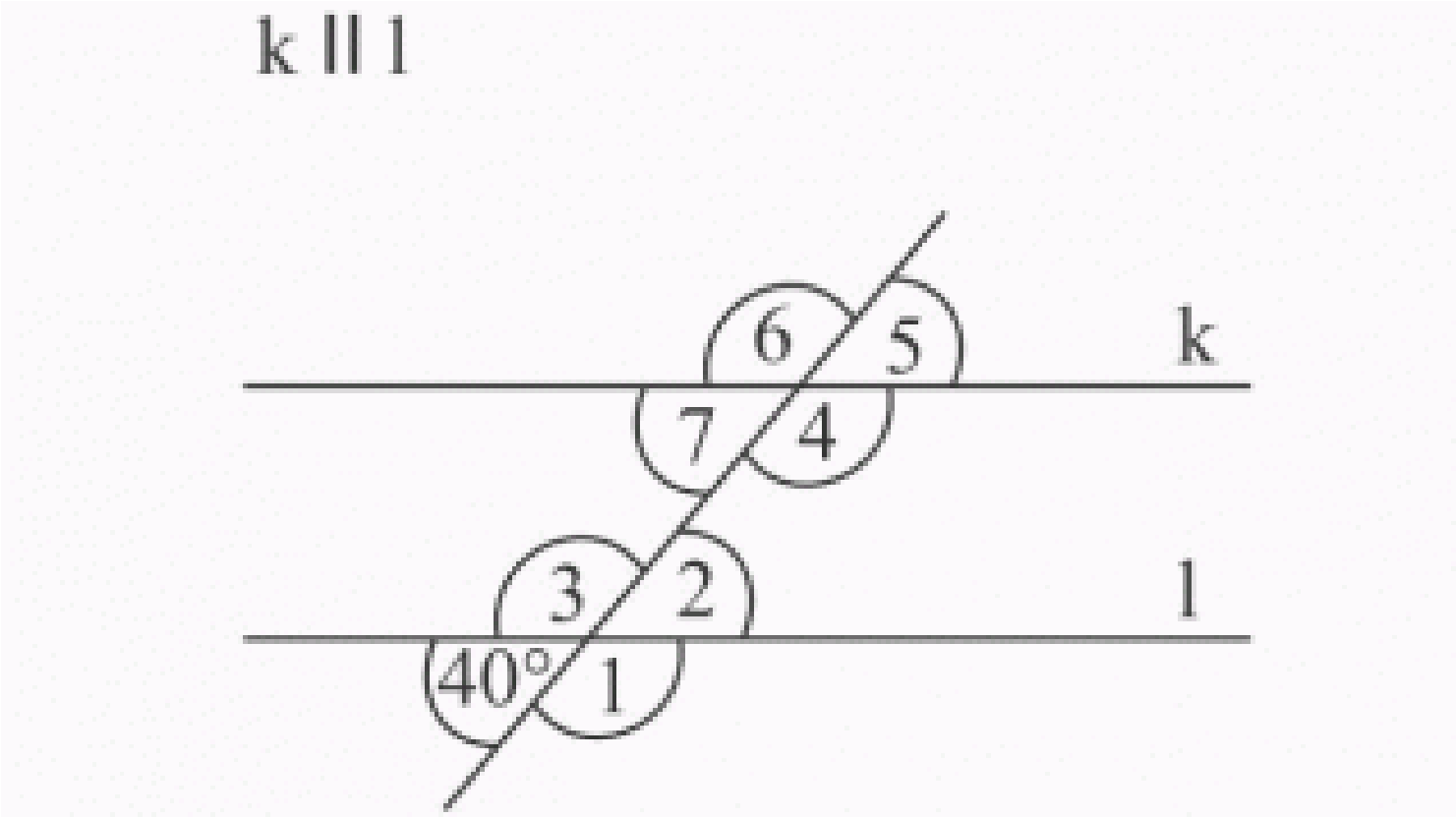
Jaką miarę ma kąt α?



α = 65°

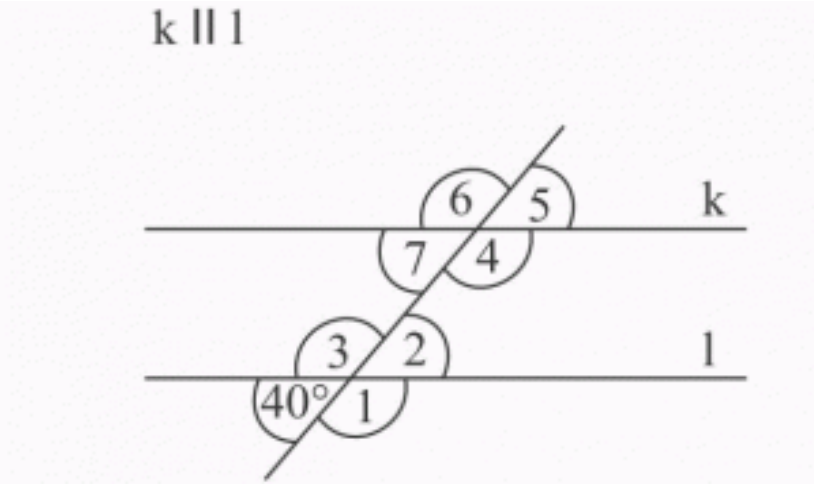
Zadanie 8.

Jaką miarę mają kąty 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?



Zadanie 8.

- Jaką miarę mają kąty 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

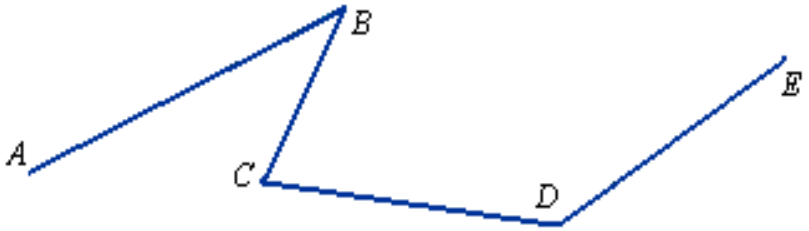


- Odpowiedź:

$\sphericalangle 1 = 180° - 40° = 140°$	$\sphericalangle 40°$ i $\sphericalangle 1$ to kąty przyległe, w sumie mają 180°
$\sphericalangle 2 = 40°$	$\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 40°$ to kąty wierzchołkowe, mają równe miary
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 1$	kąty wierzchołkowe
$\sphericalangle 3 = 140°$	
$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1$	kąty odpowiadające (są równe)
$\sphericalangle 4 = 140°$	
$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 2$	katy odpowiadające
$\sphericalangle 5 = 40°$	
$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 4$	kąty wierzchołkowe (są równe)
$\sphericalangle 6 = 140°$	
$\sphericalangle 7 = \sphericalangle 5$	kąty wierzchołkowe
lub	
$\sphericalangle 7 = \sphericalangle 2$	kąty naprzemianległe
lub	
$\sphericalangle 7 = \sphericalangle 40°$	kąty odpowiadające
$\sphericalangle 7 = 40°$	

Łamana

- Definicja:
  ŁAMANĄ nazywamy figurę geometryczną, która jest sumą skończonej liczby odcinków takich, że każde dwa kolejne mają wspólny koniec oraz:
- ✓ każde dwa kolejne odcinki i tylko dwa kolejne odcinki mają wspólny koniec,
- ✓ żadne dwa następujące po sobie odcinki nie są zawarte w jednej prostej.

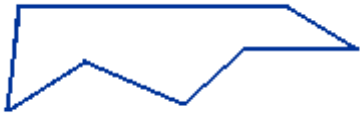


Łamana

- Odcinki łamanej nazywamy jej bokami, a ich końce wierzchołkami łamanej.
- Jeśli początek pierwszego boku pokrywa się z końcem ostatniego, to łamaną nazywamy **zamkniętą**, w przeciwnym razie mówimy, że łamana jest **otwarta**.
- Jeżeli boki łamanej nie przecinają się (nie mają punktów wspólnych poza wierzchołkami), to łamaną nazywamy **zwyczajną**, jeśli zaś boki łamanej przecinają się to łamaną taką nazywamy **wiązaną**.

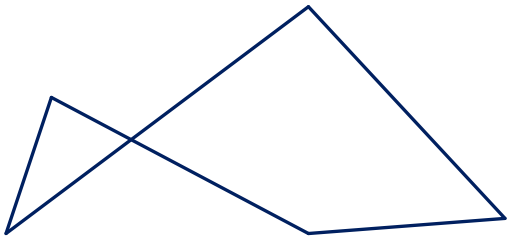
Łamana

Łamana zwyczajna otwarta



Łamana zwyczajna zamknięta

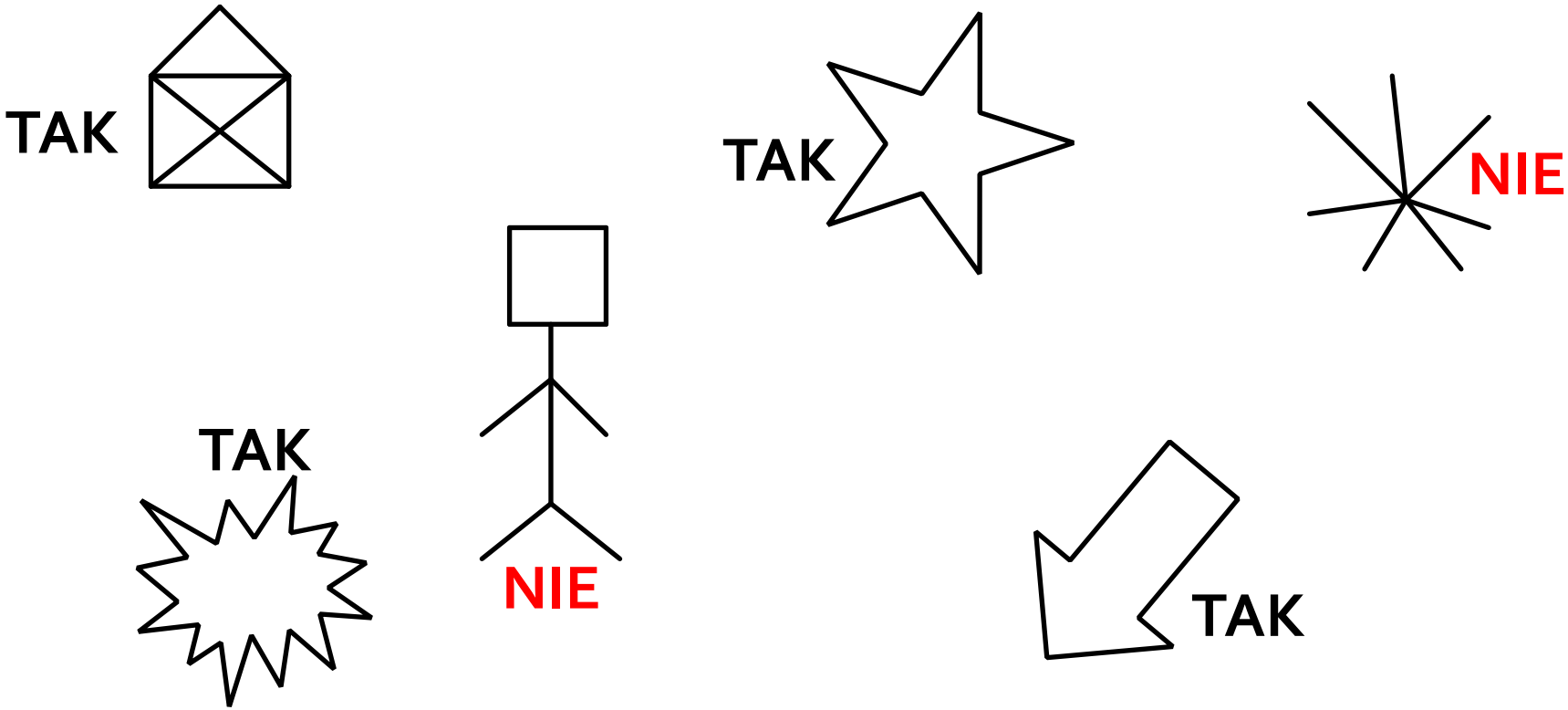
Łamana wiązana otwarta



Łamana wiązana zamknięta

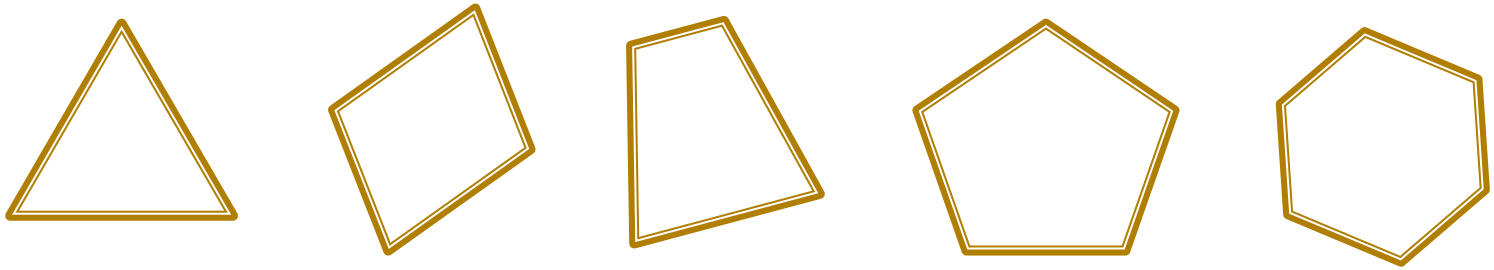
Zadanie 9.

- Czy poniższe figury są łamanymi?



Wielokąt

- **WIELOKĄT** (albo **WIELOBOK**) – figura płaska ograniczona linią łamaną zamkniętą, zazwyczaj jest to łamana zwyczajna. Boki tej łamanej nazywamy bokami wielokąta, zaś jej wierzchołki nazywamy wierzchołkami wielokąta.
- Przykłady wielokątów: trójkąty, czworokąty, pięciokąty itd.

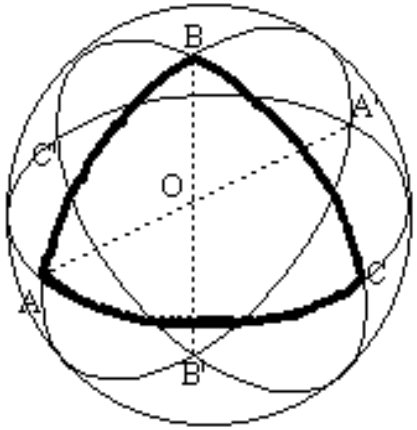


- Wielokąt mający *n* boków nazywamy *n* - bokiem lub *n*-kątem.

Wielokąt

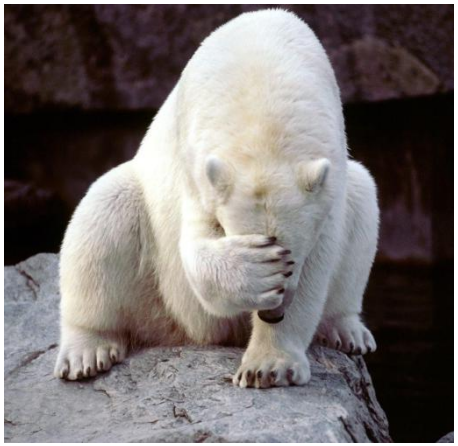
- Wielokąty można także definiować na innych powierzchniach. Bokiem łamanej (i wielokąta) jest wówczas najkrótsza w sensie obowiązującej na danej powierzchni metryki krzywa, zawierająca się w danej powierzchni i łącząca zadane dwa punkty tej powierzchni (geodezyjna).

- Przykładowo dla sfery odcinkiem jest łuk koła wielkiego przechodzącego przez dane dwa punkty sfery. Wielokąty sferyczne mają ciekawe własności, na przykład suma kątów wewnętrznych trójkąta sferycznego jest zawsze większa od 180° i ściśle związana z jego powierzchnią.



Zadanie 10.

- Zagadka Alberta Einsteina.
  Pewien człowiek spotkał niedźwiedzia. Oboje wystraszyli się i zaczęli uciekać, mężczyzna na północ, natomiast niedźwiedź na zachód. W pewnym momencie mężczyzna przypomniał sobie że ma strzelbę, zatrzymał się odwrócił w stronę południa i strzelił przed siebie. Okazało się trafił prosto w niedźwiedzia. Jakiego koloru był niedźwiedź?



Myśliwy w momencie strzału musiał znajdować się na biegunie północnym, ponieważ jedynie z tego miejsca, bez względu w którą stronę by skierował strzał to zawsze było by to w kierunku południa.

Odpowiedź: niedźwiedź był koloru białego (niedźwiedź polarny)

Wielokąt

- **PRZEKĄTNĄ WIELOKĄTA** nazywamy odcinek, który łączy dwa niekolejne wierzchołki wielokąta. Liczba przekątnych *n*-kąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.
- Jeżeli wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta są kątami wypukłymi, to wielokąt ten nazywamy **WIELOKĄTEM WYPUKŁYM**.
  Jeżeli co najmniej jeden kąt wewnętrzny wielokąta jest kątem wklęsłym, to wielokąt ten nazywamy **WIELOKĄTEM WKLĘSŁYM**.
- Kąty utworzone przez dowolne dwa kolejne boki nazywamy **KĄTAMI WEWNĘTRZNYMI** wielokąta. Suma miar kątów wewnętrznych *n*-kąta jest równa $(n - 2) \cdot 180°$.
- **KĄT ZEWNĘTRZNY** wielokąta - to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta.
  Suma miar kątów zewnętrznych każdego wielokąta wypukłego jest równa 360°.

Zadanie 11.

- Ile razy więcej przekątnych niż boków na stukąt?

- Rozwiązanie:
  liczba boków – 100

  liczba przekątnych – $\frac{100(100-3)}{2} = 50 \cdot 97 = 4850$

- Odpowiedź:
  Stukąt ma 48,5 razy więcej przekątnych niż boków.

Zadanie 12.

- Który wielokąt ma tyle samo boków co przekątnych?
- Rozwiązanie: n – liczba boków wielokąta, $n \geq 3 \wedge n \in N$

$$\frac{n(n-3)}{2} = n$$

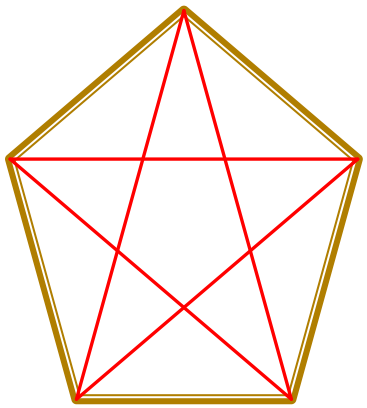
$$n(n-3) = 2n$$

$$n(n-3) - 2n = 0$$

$$n(n-3-2) = 0$$

$$n = 0 \vee n = 5$$

Odpowiedź:
Ten wielokąt to pięciokąt.



Zadanie 13.

- Liczba przekątnych pewnego wielokąta jest 5 razy większa od liczny jego boków. Jaki to wielokąt?

- Rozwiązanie: n – liczba boków wielokąta, $n \geq 3 \wedge n \in N$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 5n$$

$$n(n-3) = 10n$$

$$n(n-3) - 10n = 0$$

$$n(n-3-10) = 0$$

$$n = 0 \vee n = 13$$

Odpowiedź:
Ten wielokąt to trzynastokąt.

Wielokąt foremny

- **WIELOKĄTEM FOREMNYM** nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

- Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi. Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.

- Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

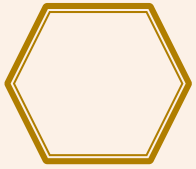
Wielokąt foremny

- Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

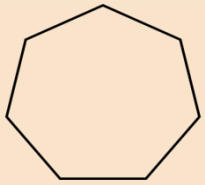
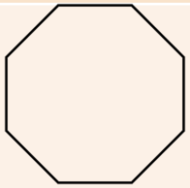
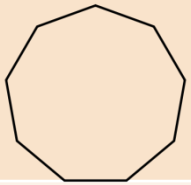
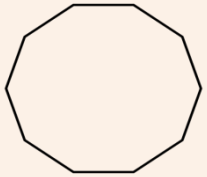
- Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Wielokątami foremnymi zajmował się między innymi niemiecki matematyk Karol Fryderyk Gauss, który w 1801 odkrył, że *n*-kąt foremny daje się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy *n* jest liczbą postaci $2^k p$, gdzie *p* jest liczbą pierwszą Fermata.

Wielokąty foremne - przegląd

Wielokąt	Rysunek	Miara kata wewnętrznego	Pole wielokąta
trójkąt		60°	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
kwadrat		90°	$P = a^2$
pięciokąt		108°	$P = \frac{a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}$
sześciokąt		120°	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Wielokąty foremne - przegląd

Wielokąt	Rysunek	Miara kata wewnętrznego	Pole
siedmiokąt **heptagon**		$128\frac{4}{7}^{o}$	$P=\frac{7}{4}a^2 ctg\frac{\pi}{7}\approx 3{,}63391\cdot a^2$
ośmiokąt **oktagon**		135°	$P=2a^2 ctg\frac{\pi}{8}\approx 4{,}82843\cdot a^2$
dziewięciokąt **nonagon**		140°	$P=\frac{9}{4}a^2 ctg\frac{\pi}{9}\approx 6{,}18182\cdot a^2$
dziesięciokąt **dekagon**		144°	$P=\frac{5}{2}a^2 ctg\frac{\pi}{10}\approx 7{,}6942\cdot a^2$

Wielokąty foremne – cd.

Wzór na	Pole wielokąta
miarę kąta wewnętrznego (pomiędzy sąsiednimi bokami)	$\gamma = \frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{180^0(n-2)}{n}$
miarę kąta środkowego (czyli kąt, pod jakim widziany jest bok wielokąta z jego środka)	$\beta = \frac{2\pi}{n} = \frac{360^0}{n}$
długość boku wielokąta foremnego przez promienie okręgów opisanego i wpisanego	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$